MATHEMATICS

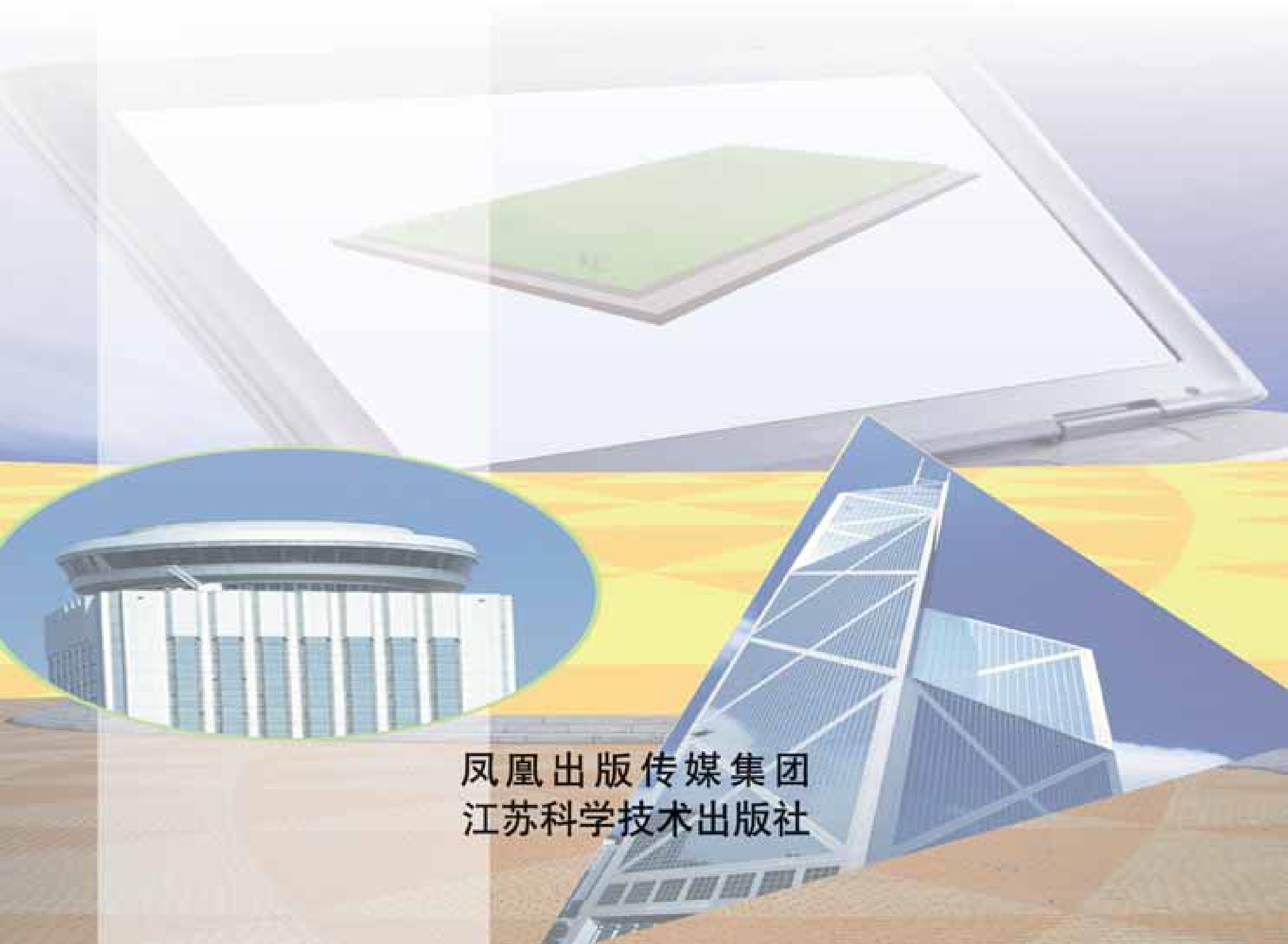
经全国中小学教材审定委员会2003年初审通过

义务教育课程标准实验教科书

数学 七年级（下册）

SHU XUE

杨裕前 董林伟 主编



凤凰出版传媒集团
江苏科学技术出版社

● **主　　编**　杨裕前　董林伟

● **编写人员**　周　凯　赵维坤　李善良　朱建明

贺明荣　童大成　孔凡海　徐娣荣

参加本书修改讨论的有（按姓氏笔画为序）：

于　明　王玉宏　王永建　王晓谦　孙朝仁

陈大勇　陈志廉　周学祁　居春兰　荆福仁

杨　洋　杨秋萍　徐延觉　黄　坪

● **美术编辑**　刘旭东

● **责任编辑**　许礼光　葛庆文　闵正年

在本书编写过程中，得到了许多专家的指导和帮助，在此一并表示衷心感谢．

致 同 学

亲爱的少年朋友:

春天即将来临，大地万物复苏．踏着春天的脚步，我们进入了一个充满活力的新学期．

数学，已经成为了你的朋友．通过这册课本的学习，你将更多地了解、熟悉她——

“平面图形的认识（二）”将帮助你更好地认识平行线、三角形等简单图形，并探索它们的一些基本性质；

“幂的运算”将引导你通过观察、猜想，由特殊到一般地得到一些有用的运算法则；

“从面积到乘法公式”将别开生面地通过图形面积的计算，得出整式乘法的法则和公式，简明、奇妙而有趣，并通过“互逆变形”学习多项式因式分解的一些方法；

“二元一次方程组”将使你进一步学会用“方程”这种工具，解决比较复杂的实际问题，更加感受到方程的魅力；

“图形的全等”将引导你探索全等图形的性质以及怎样的两个三角形能够全等；

“数据在我们周围”将引导你学习收集、整理、描述数据的一些方法；

“感受概率”将让你在富有情趣的活动中，初步了解事情发生的“可能性”，并用实验的方法估计一些事件的概率．

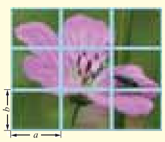
学习数学，不仅要想，而且要做；不仅要自主探索，而且要与同学合作交流；不仅要掌握数学知识和技能，而且要学会思考的方法．这样，你一定会在数学学习中不断进步！

目　录

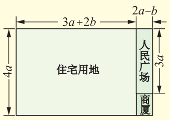
第七章　平面图形的认识（二）

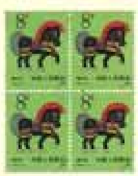
第八章　幂的运算

第九章　从面积到乘法公式



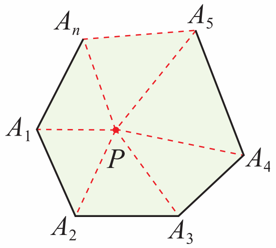
目　录



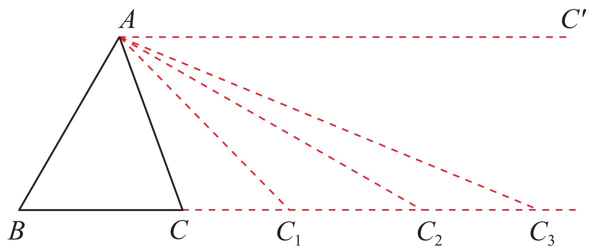


目　录

第七章 平面图形的认识(二)



平行线、三角形是生活中常见的图形．研究这些图形，可以帮助我们更好地认识世界．



如图，将三角形 ABC 的边 AC 所在的直线绕点 A 按逆时针方向旋转，与边 BC 的延长线分别交于点 C_1、C_2、C_3 ……

(1) 在旋转过程中，哪些角的大小发生了变化?

(2) 度量 $\angle BAC$ 与 $\angle ACB$、$\angle BAC_1$ 与 $\angle AC_1B$、$\angle BAC_2$ 与 $\angle AC_2B$、$\angle BAC_3$ 与 $\angle AC_3B$，并分别求它们的和 . 你发现了什么?

(3) 当直线 AC 绕点 A 旋转到 AC'，使 $AC' \parallel BC$ 时，猜想 $\angle BAC'$ 的度数，并用量角器量一量，检验你的猜想 .

(4) 想一想，$\angle BAC' + \angle B$ 等于多少度?

● 本章将探索平行线与三角形的一些性质 .

7.1 探索直线平行的条件

利用三角尺和直尺可以画平行线(如图 7-1):

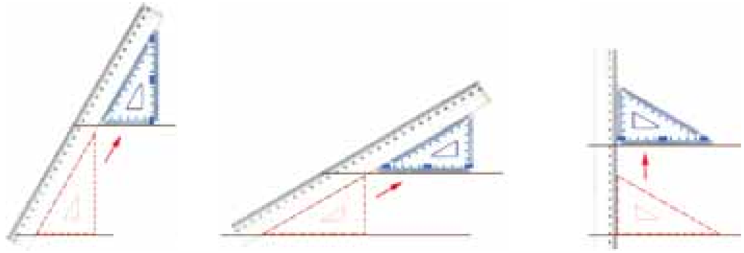


图 7-1

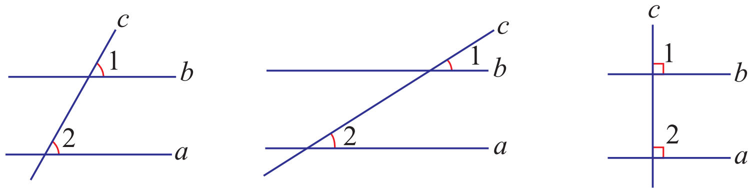


图 7-2

在图 7-2 中，∠1 与∠2 相等，所画的直线 a、b 就平行 .

说一说

在图 7-3 中，∠1 与∠2 不相等，直线 a、b 平行吗?

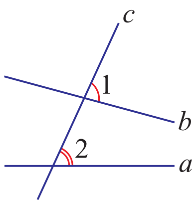
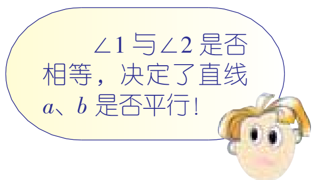


图 7-3



如图 7-4，在两条直线 a、b 被第三条直线 c 所截而成的 8 个角中，像∠1 与∠2 这样的一对角称为**同位角**(corresponding angles) .

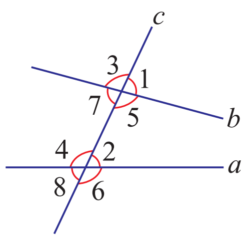
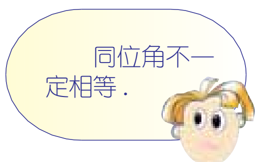


图 7-4



想一想

在图 7–4 中，还有没有其他的同位角？

由此，我们知道：

同位角相等，两直线平行．

例 1 如图 7–5，$\angle 1=\angle C$，$\angle 2=\angle C$．请找出图中互相平行的直线，并说明理由．

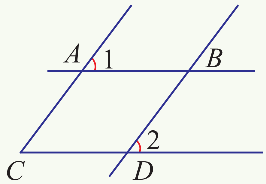


图 7–5

解：（1）$AB/\!/CD$．

因为 $\angle 1$ 与 $\angle C$ 是 AB、CD 被 AC 截成的同位角，且 $\angle 1=\angle C$，

所以 $AB/\!/CD$．

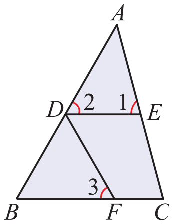
（2）$AC/\!/BD$．

因为 $\angle 2$ 与 $\angle C$ 是 BD、AC 被 CD 截成的同位角，且 $\angle 2=\angle C$，

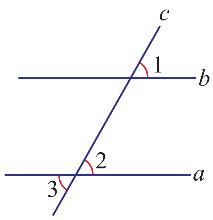
所以 $AC/\!/BD$．

练一练

1. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle C$、$\angle 2$ 与 $\angle B$、$\angle 3$ 与 $\angle C$ 分别是哪两条直线被哪一条直线截成的同位角？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 1=\angle 3$．直线 a 与直线 b 平行吗？为什么？

议一议

1. 如图 7–6，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 2=\angle 3$．直线 a 与直线 b 平行吗？为什么？

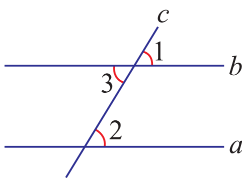


图 7–6

2. 如图 7-7，直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 2+\angle 3=180^\circ$．直线 a 与直线 b 平行吗？为什么？

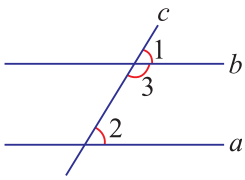
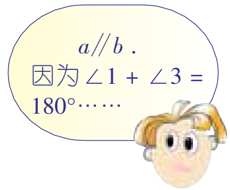


图 7-7



如图 7-8，在两条直线 a、b 被第三条直线 c 所截而成的 8 个角中，像 $\angle 2$ 与 $\angle 7$ 这样的一对角称为**内错角**（alternate interior angles）．像 $\angle 2$ 与 $\angle 5$ 这样的一对角称为**同旁内角**（interior angle on the same side）．

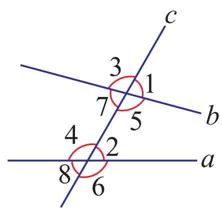


图 7-8

想一想　在图 7-8 中，还有没有其他的内错角和同旁内角？

由此，我们知道：

> 内错角相等，两直线平行．
> 同旁内角互补，两直线平行．

例 2　如图 7-9，$\angle 1=\angle 2$，$\angle B+\angle BDE=180^\circ$．图中哪些线互相平行？为什么？

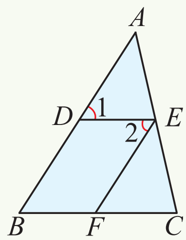


图 7-9

解：（1）$AB/\!/EF$．

因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是 AB、EF 被 DE 截成的内错角，且 $\angle 1=\angle 2$，

所以 $AB/\!/EF$．

（2）$DE/\!/BC$．

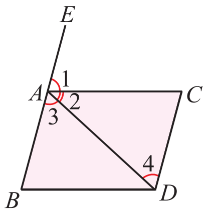
因为 $\angle B$ 与 $\angle BDE$ 是 BC、DE 被 AB 截成的同旁内角，且 $\angle B+\angle BDE=180^\circ$，

所以 $DE/\!/BC$．

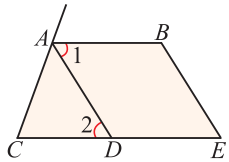
想一想，图 7-9 中的 $\angle 2$ 与哪个角相等时，$DE/\!/BC$？$\angle A$ 与哪个角相等时，$AB/\!/EF$？

练一练

1. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle B$、$\angle 3$ 与 $\angle 4$、$\angle 2$ 与 $\angle 4$ 分别是哪两条直线被哪一条直线截成的角？它们分别是什么角？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，填空：

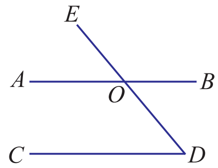
（1）因为 $\angle 1 = \angle 2$，所以______$/\!/$______；

（2）因为 $\angle 2 =$ ______，所以 $AD/\!/BE$；

（3）因为 $\angle 1 + \angle B = 180°$，所以______$/\!/$______；

（4）因为 $\angle 1 + \angle$____ $= 180°$，所以 $AB/\!/DE$．

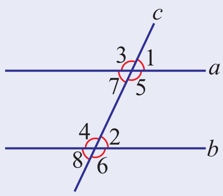
3. 如图，直线 AB 与 ED 相交于点 O，$\angle BOE = 130°$，$\angle EDC = 50°$．AB 与 CD 平行吗？为什么？



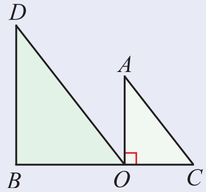
（第 3 题）

习题 7.1

1. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截，请给出一个你认为适合的条件，使 $a/\!/b$，并说明理由．



（第 1 题）

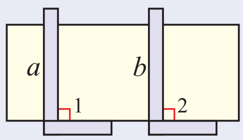


（第 2 题）

2. 如图，$AO \perp BC$，垂足为 O，$\angle DOB = 58°$．当 $\angle B$ 等于多少度时，$DB/\!/AO$？当 $\angle C$ 等于多少度时，$AC/\!/DO$？

3.（1）木工师傅用角尺在工件上画出工件边缘的两条垂线 a、b（如图），这两条垂线平行吗？为什么？

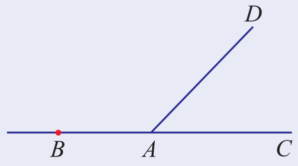
（2）由（1）你能得到什么结论？请与同学交流．



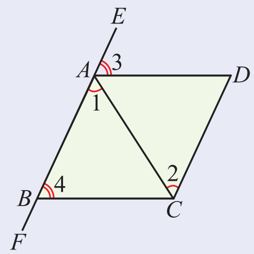
（第 3 题）

4. （1）用直尺和圆规画图：如图，以 B 为顶点，射线 BC 为一边，画 $\angle EBC$，使 $\angle EBC=\angle DAC$；

（2）在所画图中，BE 与 AD 平行吗？为什么？



（第 4 题）

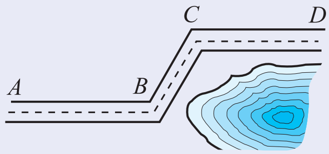


（第 5 题）

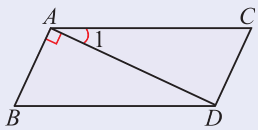
5. 如图，如果 $\angle 1=\angle 2$，那么 AB 与 DC 平行吗？为什么？

如果 $\angle 3=\angle 4$，那么可以判断哪两条直线平行？为什么？

6. 如图，一条道路需拐弯绕湖而过．如果道路的两个拐角 $\angle ABC$ 与 $\angle BCD$ 均为 $120°$，那么道路 AB 与道路 CD 平行吗？为什么？



（第 6 题）



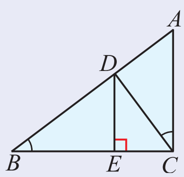
（第 7 题）

7. 如图，$\angle 1=25°$，$\angle B=65°$，$AB\perp AD$，垂足为 A．

（1）AC 与 BD 平行吗？为什么？

（2）根据题中的条件，能判断 AB 与 CD 平行吗？如果能，请说明理由；如果不能，还应添加什么条件？

8. 如图，$\angle B$ 与 $\angle BCD$ 互为余角，$\angle B=\angle ACD$，$DE\perp BC$，垂足为 E．AC 与 DE 平行吗？为什么？



（第 8 题）

7.2 探索平行线的性质

我们知道,两条直线被第三条直线所截,如果同位角相等,或内错角相等，或同旁内角互补，那么两条直线平行．反过来，如果两条直线平行，那么被第三条直线所截而成的同位角、内错角、同旁内角各有怎样的数量关系?

数学实验室

1. 在练习本上画两条平行线 AB、CD，再画直线 MN 与直线 AB、CD 相交(如图 7-10)．

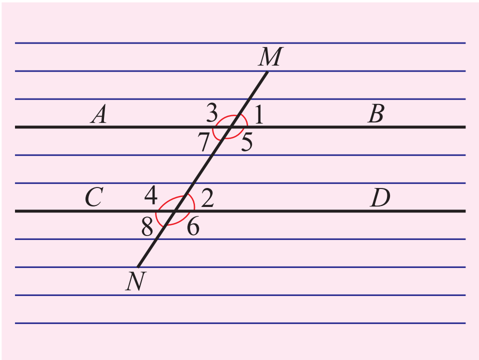


图 7-10

指出图 7-10 中的同位角、内错角、同旁内角．

2. 把图 7-10 剪成如图 7-11(1)、(2)、(3)、(4)的 4 块．

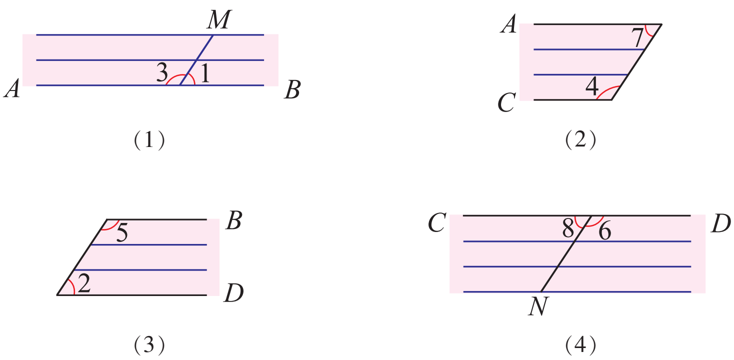


图 7-11

分别把图 7-10 中的每对同位角、内错角重叠，你发现了什么?

3. 把图 7–11(2)、(3)分别剪成两部分，并按图 7–12拼在一起．你发现每对同旁内角之间有怎样的数量关系？

图 7–12

由此，我们知道：

两直线平行，同位角相等．
两直线平行，内错角相等．
两直线平行，同旁内角互补．

议一议

你能根据“两直线平行，同位角相等”，说明“两直线平行，内错角相等”成立的理由吗？

如图 7–13，
因为 $a//b$，
所以 $\angle 1=\angle 2$．
又因为 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是对顶角，
所以 $\angle 1=\angle 3$．
所以 $\angle 2=\angle 3$．

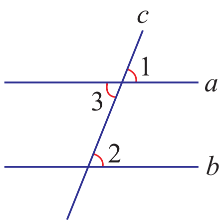


图 7–13

类似地，请根据“两直线平行，同位角相等”，说明“两直线平行，同旁内角互补”成立的理由，并与同学交流．

例　如图 7–14，$AD//BC$，$\angle A=\angle C$．试说明 $AB//DC$．

解： 根据“两直线平行，内错角相等”，
因为 $AD//BC$，
所以 $\angle C=\angle CDE$．
又因为 $\angle A=\angle C$，
所以 $\angle A=\angle CDE$．
根据“同位角相等，两直线平行”，
可以知道 $AB//DC$．

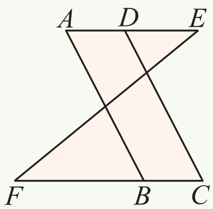
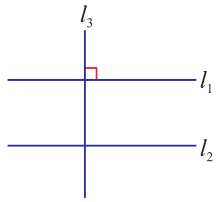


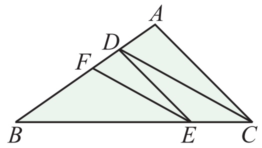
图 7–14

练一练

1. 如图，$l_1 /\!/ l_2$，$l_3 \perp l_1$，l_3 与 l_2 有怎样的位置关系？说说你是如何思考的．



（第 1 题）

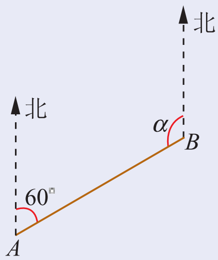


（第 2 题）

2. 如图，$CD /\!/ EF$，$DE /\!/ AC$，请找出图中相等的角，并说明理由．

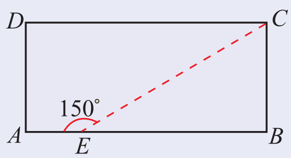
习题 7.2

1. 如图，在 A、B 两地之间修一条笔直的公路，从 A 地测得公路的走向为北偏东 $60°$．如果 A、B 两地同时开工，那么 $\angle\alpha$ 是多少度时，才能使公路准确接通？

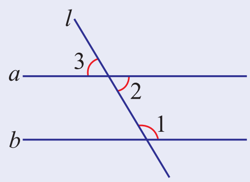


（第 1 题）

2. 如图，一块钢板 $ABCD$ 的两边 AB、DC 平行．要在 AB 上找一点 E，使 $\angle AEC = 150°$，应怎样确定点 E 的位置？为什么？

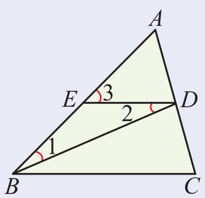


（第 2 题）

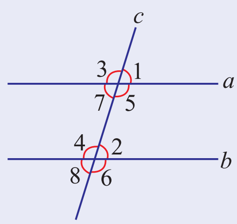


（第 3 题）

3. 如图，直线 a、b 被直线 l 所截，$a /\!/ b$，$\angle 1 = 121°$．求 $\angle 3$ 的度数．
4. 如图，BD 平分 $\angle ABC$，$ED /\!/ BC$，$\angle 1 = 25°$．求 $\angle 2$、$\angle 3$ 的度数．



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，直线 a、b 被直线 c 所截．由 $\angle 1 = \angle 2$，你可以得出哪些结论？为什么？

7.3 图形的平移

手扶电梯上的人、传送带上的物品……都在沿着某一方向平行移动．

你能举出生活中类似的例子吗？

做做

1. 把图 7–15 中的三角形 ABC 向右平行移动 6 格，画出所得到的三角形 $A'B'C'$．

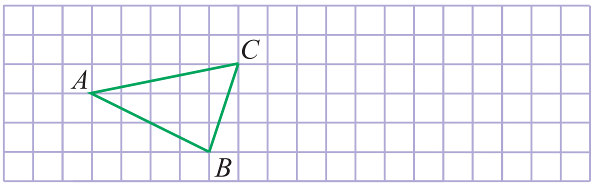


图 7–15

度量三角形 ABC 与三角形 $A'B'C'$ 的边、角的大小，你发现了什么？

2. (1) 图 7–16 是按照什么规律画出来的？

(2) 请按照这个规律继续画下去．

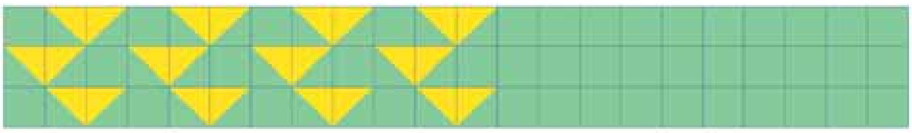


图 7–16

在平面内，将一个图形沿着某个方向移动一定的距离，这样的图形运动叫做图形的**平移**（translation）. 平移不改变图形的形状、大小.

议一议

1. 平移图 7-17(1)，可以得到图 7-17(2)、(3)、(4)中的哪一个图案？

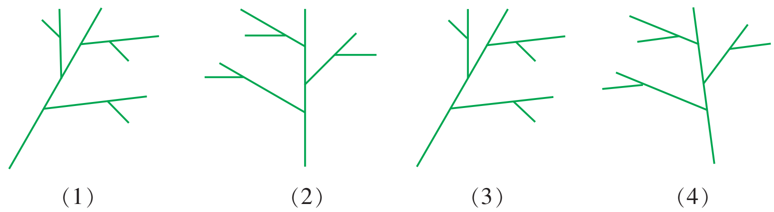


图 7-17

2. 在图 7-18 中，4 个小三角形都是等边三角形，边长为 1.3 cm . 通过平移三角形 ABC 能得到图中哪几个三角形？请画出平移的方向，并说出平移的距离 .

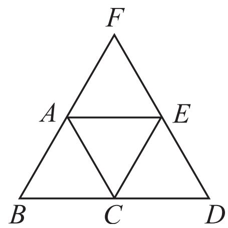


图 7-18

3. 图 7-19 是一幅“水兵合唱队”图案 . 这幅图案是如何运用平移制作的？

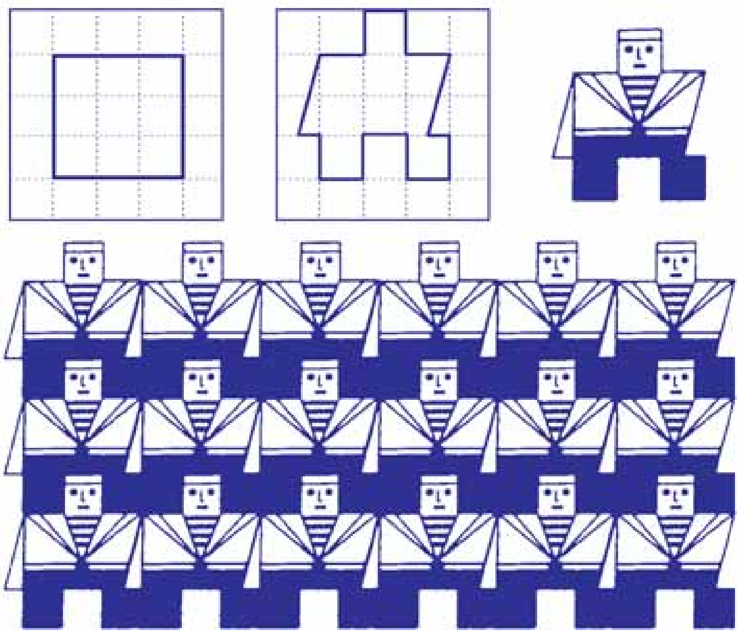
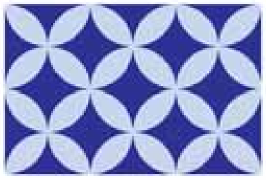


图 7-19

练一练

1. 下列图案是怎样通过平移得到的?

①



②

(第 1 题)

2. 奥运会五环旗中的 5 个圆可以看做是由一个圆经过平移得到的.请用圆作为“基本图形”，通过平移设计一个新的图案，并说说它所表示的意义.

(第 2 题)

做一做

在图 7–20 的方格纸上，将线段 AB 向左平移 4 格，得到线段 $A'B'$，再将线段 $A'B'$ 向上平移 3 格，得到线段 $A''B''$.

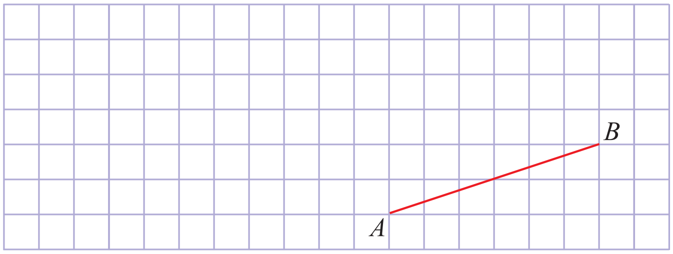


图 7–20

画出连接对应点的线段 AA' 与 BB'.线段 AA' 与 BB' 之间有怎样的关系?

议一议

1. 在图 7–21 中，四边形 $A'B'C'D'$ 是怎样由四边形 $ABCD$ 平移得到的?

2. 线段 AA'、BB'、CC'、DD' 之间有怎样的关系?

3. 取线段 AD 的中点 M，画出点 M 平移后对应的点 M'，连接 MM'.线段 MM' 与线段 AA' 之间有怎样的关系?

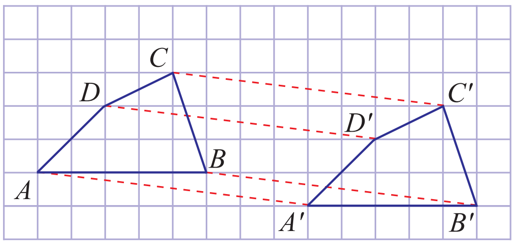


图 7–21

图形经过平移，连接各组对应点所得的线段互相平行（或在同一条直线上）并且相等．

将三角尺沿直尺平移（如图 7–22）．

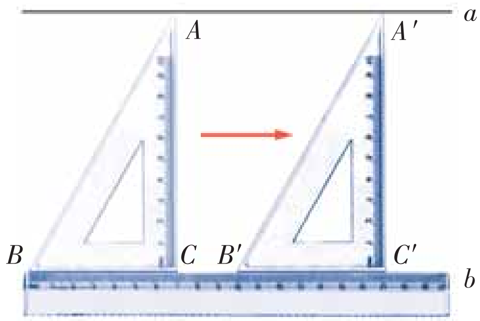


图 7–22

（1）三角尺的顶点 A、B 移动所形成的两条直线 a、b 是否平行？为什么？

（2）在平移过程中，AC 是否始终垂直于直线 a、b？

做一做

1. 如图 7–23，直线 a 与直线 b 平行．

（1）在直线 a 上任取两点 A、A'，分别过点 A、A'作直线 b 的垂线，垂足分别为 C、C'；

（2）分别度量点 A、A'到直线 b 的距离，你发现了什么？

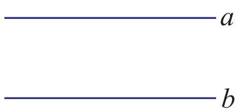


图 7–23

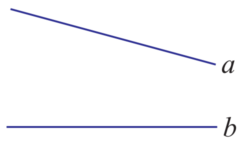


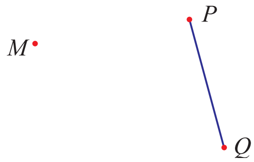
图 7–24

2. 在图 7–24 中，直线 a 与直线 b 不平行，仿照上面的做法再试试．

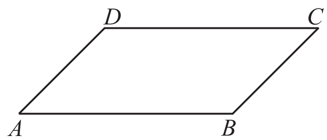
如果两条直线互相平行，那么其中一条直线上任意两点到另一条直线的距离相等，这个距离称为**平行线之间的距离**．

练一练

1. 平移图中的线段 PQ，使它的端点 P 移到点 M 的位置．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$．试度量 AB 与 DC、AD 与 BC 之间的距离，并与同学交流你的做法．

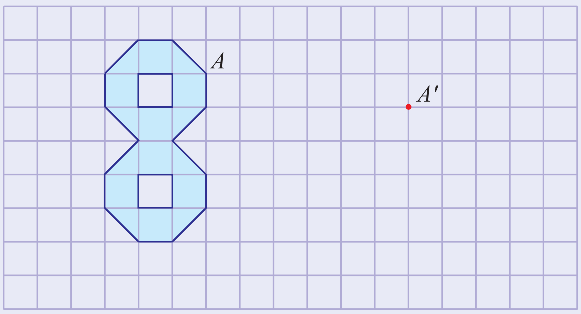
习题 7.3

1. 按下列要求画图：

(1) 将三角形 ABC 向右平移 8 格；

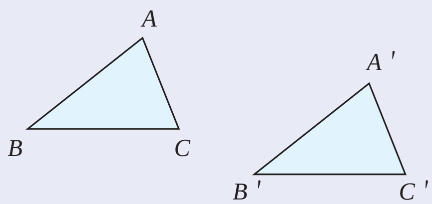
（第 1(1)题）

(2) 平移所给的图形，使点 A 移到点 A' 的位置．



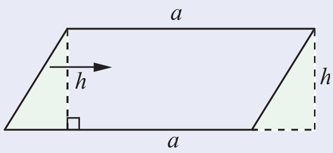
（第 1(2)题）

2. 如图，三角形 ABC 经过平移后得到三角形 $A'B'C'$．画出三角形 ABC 平移的方向，并量出平移的距离．



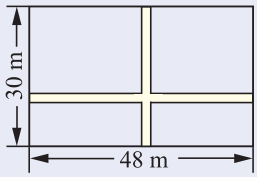
（第 2 题）

3. 用平移的方法说明怎样得出平行四边形的面积公式 $S=ah$.



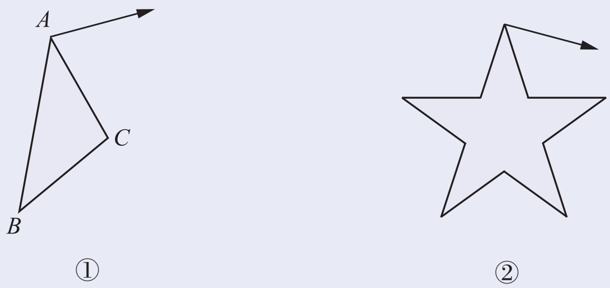
（第 3 题）

4. 如图，在长为 48 m、宽为 30 m 的长方形地块上，修建 2 条宽为 1 m 的道路，余下部分种植西红柿. 种植西红柿的面积是多少？你能用平移的方法简便地求出种植西红柿的面积吗？试试看.



（第 4 题）

5. 将下列图形按箭头所指的方向平移 2 cm.



（第 5 题）

7.4 认识三角形

帆船

金字塔

举出生活中见到的三角形，并与同学交流．

三角形是由 3 条不在同一直线上的线段，首尾依次相接组成的图形．

三角形有 3 条边、3 个内角和 3 个顶点．顶点是 A、B、C 的三角形记作“$\triangle ABC$”．$\angle A$ 所对的边 BC 也可以用 a 表示．类似地，边 AC、AB 可以分别用 b、c 表示（如图 7-25）．

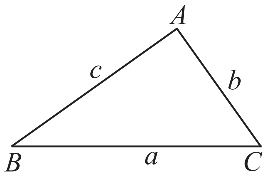
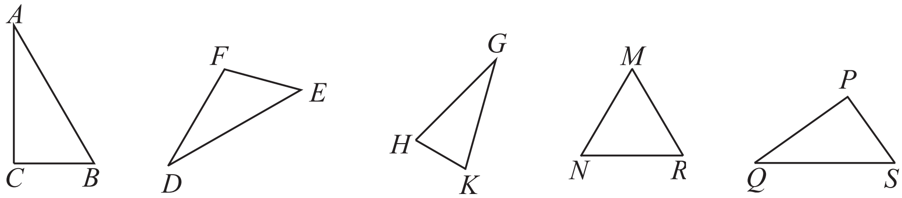


图 7-25

议一议

1. 在图 7-26 的三角形中，有锐角三角形、直角三角形、钝角三角形吗？

2. 在图 7-26 的三角形中，有等腰三角形吗？



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

图 7-26

数学实验室 如图 7–27，准备 5 根小木棒，长度分别为 3 cm、4 cm、5 cm、6 cm 和 9 cm，任意取出 3 根小木棒首尾相接搭三角形．

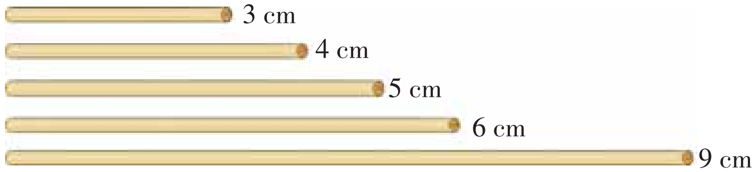
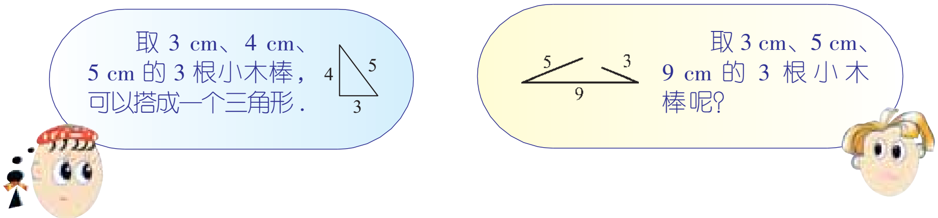


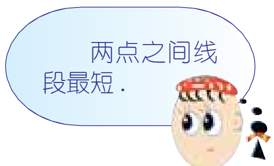
图 7–27



与同学交流上述实践活动的体会．

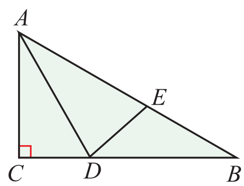
由此，我们知道：

三角形的任意两边之和大于第三边．



练一练

1. 图中共有几个三角形？请分别把它们表示出来，并指出它们是锐角三角形？直角三角形？还是钝角三角形？
2. 4 根小木棒的长度分别为 2 cm、3 cm、4 cm 和 5 cm，任取其中 3 根，可以搭出几个不同的三角形？为什么？



（第 1 题）

如图 7-28，橡皮筋的一端固定在△ABC 的顶点 A 上，另一端从点 B 出发沿 BC 移动到点 C . 在这个过程中，哪些线段、角的大小发生了变化?

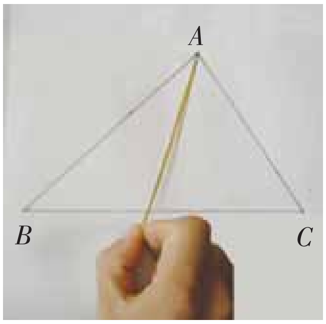


图 7-28

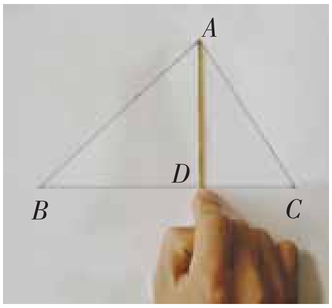


图 7-29

如图 7-29，线段 AD 垂直于 BC，垂足为 D，我们把线段 AD 叫做△ABC 的高 .

在三角形中，从一个顶点向它的对边所在直线作垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高线，简称**三角形的高**（height of triangle）.

如图 7-30，线段 AE 平分∠BAC 交边 BC 于点 E，我们把线段 AE 叫做△ABC 的角平分线 .

在三角形中，一个内角的平分线与它的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫做**三角形的角平分线**（angular bisector of triangle）.

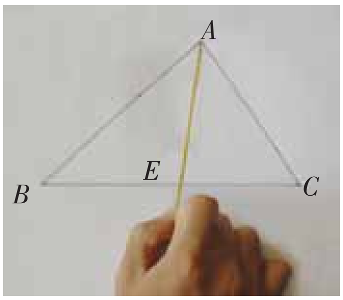


图 7-30

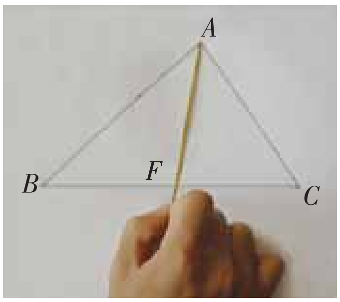


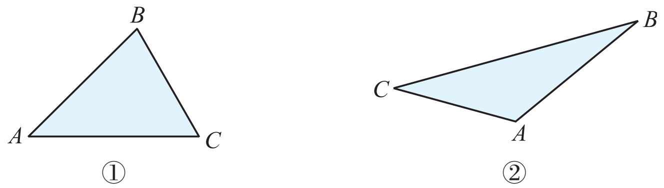
图 7-31

如图 7-31，F 是边 BC 上的中点，我们把线段 AF 叫做△ABC 的中线 .

在三角形中，连接一个顶点与它对边中点的线段，叫做**三角形的中线**(median of triangle).

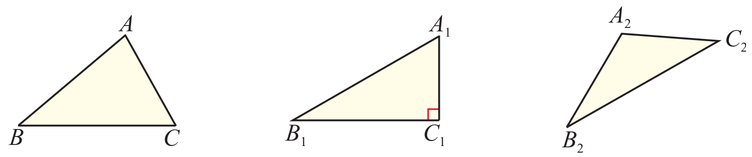
练一练

1. 用折纸的方法折出一张三角形纸片的角平分线，能折出几条？你有什么发现？
2. 画出下图中$\triangle ABC$的中线，分别能画出几条？你有什么发现？



（第 2 题）

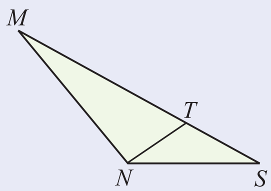
3. 如图，$\triangle ABC$是锐角三角形，$\triangle A_1B_1C_1$是直角三角形，$\triangle A_2B_2C_2$是钝角三角形，分别画出它们的高，各能画出几条？你有什么发现？



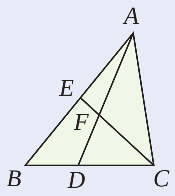
（第 3 题）

习题 7.4

1. 图中有几个三角形？分别用字母把它们表示出来，并写出它们的边和角．

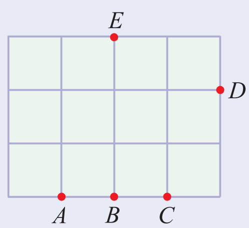


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在BC、AB上，AD与CE相交于点F．图中，AC分别是哪些三角形的一条边？$\angle B$分别是哪些三角形的一个内角？
3. 由 12 个边长为 1 的小正方形拼成 1 个长方形，点A、B、C、D、E分别在小正方形的顶点上（如图），过其中的任意 3 点画三角形，一共可以画多少个三角形？其中，哪些是直角三角形、钝角三角形、锐角三角形？哪些是等腰三角形？



（第 3 题）

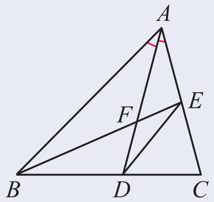
4. 下列长度的3根小木棒能搭成三角形吗?

(1) 3 cm, 5 cm, 10 cm;

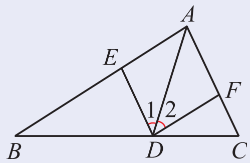
(2) 5 cm, 4 cm, 9 cm;

(3) 4 cm, 6 cm, 9 cm.

5. 如图, 在$\triangle ABC$中, $\angle BAD=\angle CAD$, $AE=CE$, AD与BE相交于点F. 试指出AD、AF分别是哪个三角形的角平分线? BE、DE分别是哪个三角形的中线?



(第5题)



(第6题)

6. 如图, AD是$\triangle ABC$的角平分线, $DE /\!/ CA$, 并且交AB于点E, $DF /\!/ BA$, 交AC于点F. $\angle 1$与$\angle 2$是否相等? 为什么?

7. 你能把1个三角形分成面积相等的2个三角形吗? 能分成面积相等的4个三角形吗? 请与同学交流你的画法.

7.5 三角形的内角和

小学里我们已用拼图（如图 7–32）的方法得出：

三角形 3 个内角的和等于 180°.

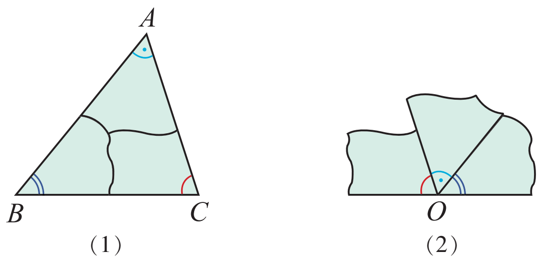


图 7–32

还有其他方法说明“三角形 3 个内角的和等于 180°”吗？

议一议

如图 7–33，若木条 a 与木条 b 平行，则 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

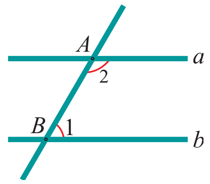


图 7–33

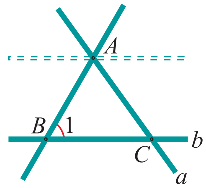


图 7–34

如图 7–34，把木条 a 绕点 A 转动，使它与木条 b 相交于点 C，你能说明“三角形 3 个内角的和等于 180°”的理由吗？

例 如图 7–35，AC、BD 相交于点 O. $\angle A$ 与 $\angle B$ 的和等于 $\angle C$ 与 $\angle D$ 的和吗？为什么？

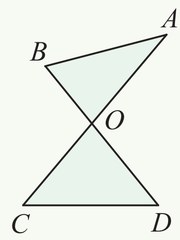


图 7–35

解： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

在 $\triangle AOB$ 中，

$\angle A + \angle B + \angle AOB = 180°$，即

$\angle A + \angle B = 180° - \angle AOB$.

在△COD 中，

$\angle C+\angle D+\angle COD=180°$，即

$\angle C+\angle D=180°-\angle COD$.

因为$\angle AOB$与$\angle COD$是对顶角，

所以$\angle AOB=\angle COD$.

所以$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

做一做

1. 根据图 7-36 填空：

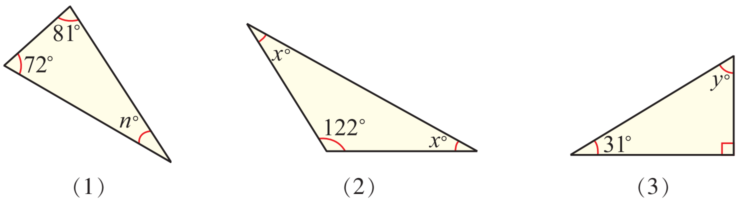


图 7-36

(1) $n=$______；　(2) $x=$______；　(3) $y=$______.

2. 在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A$ 与$\angle B$ 的和为多少度？

由此，我们知道：

直角三角形的两个锐角互余.

试一试

在图 7-37 中，把△ABC 的边 AB 延长，得到$\angle CBD$.

(1) 度量$\angle A$、$\angle C$ 和$\angle CBD$ 的度数；

(2) $\angle A+\angle C+\angle 1=$______，

$\angle CBD+\angle 1=$______.

由此，你能发现$\angle A+\angle C$与$\angle CBD$的大小关系吗？

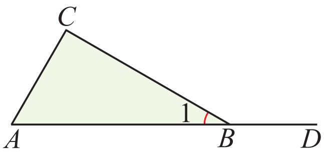


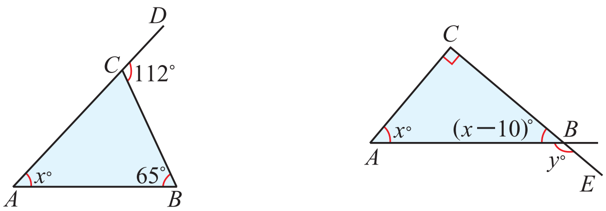
图 7-37

图 7-37 中的$\angle CBD$称为△ABC 的一个外角. 像这样，三角形的一边与另一边的延长线所组成的角，叫做三角形的**外角**（exterior angle）.

三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

练一练

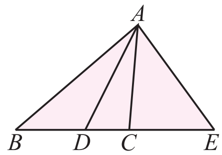
1. 求图中 x 和 y 的值 .



① ②

（第 1 题）

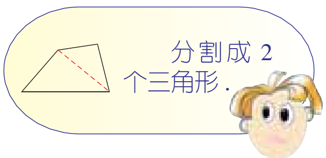
2. (1) 在一个三角形的 3 个内角中，最多能有几个直角？最多能有几个钝角？为什么？
   (2) 直角三角形的外角可能是锐角吗？为什么？
3. 如图，AD 是△ABC 的角平分线，E 是 BC 延长线上一点，$\angle EAC=\angle B$．$\angle ADE$ 与 $\angle DAE$ 相等吗？为什么？



（第 3 题）

议一议

四边形的内角和等于多少度？



在图 7–38 中，连接 AC，把四边形 $ABCD$ 分成 2 个三角形 . 你能计算四边形 $ABCD$ 的内角和吗？

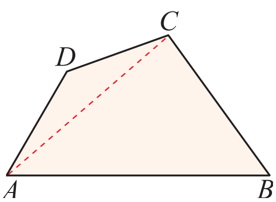


图 7–38

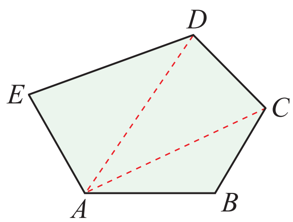


图 7–39

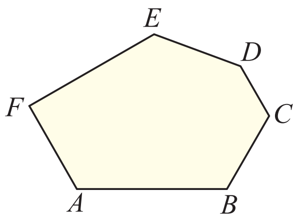


图 7–40

在图 7–39 中，连接 AC、AD，把五边形 $ABCDE$ 分成 3 个三角形 . 你能计算五边形 $ABCDE$ 的内角和吗？

在图 7–40 中，仿照上面的方法，六边形 $ABCDEF$ 可以分成多少个三角形？

……

n 边形可以分成多少个三角形？

填表：

多边形的边数	3	4	5	6	7	…	n
分成的三角形个数	1	2	3			…	
多边形的内角和	180°	180°× 2	180°× 3			…	

由此，我们知道：

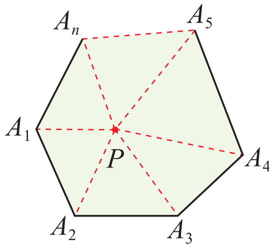
n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot180°$.

想一想

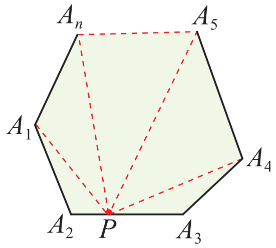
小明、小丽分别用以下的方法求多边形的内角和：

小明在多边形内取一点 P，分别连接 PA_1、PA_2、PA_3、…、PA_n(如图 7-41(1)).

小丽在多边形的一边 A_2A_3 上任取一点 P，分别连接 PA_1、PA_4、PA_5、…、PA_n(如图 7-41(2)).



(1)



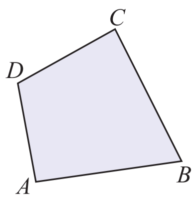
(2)

图 7-41

这两种方法可行吗？如果可行，请你按照这两种设计思路求出 n 边形的内角和 .

练一练

1. 已知四边形 4 个内角的度数之比是 1∶2∶3∶4，求这个四边形中最大角的度数 .
2. 一个多边形的内角和为 1 080°，这个多边形是几边形？
3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，那么它的另一组对角 $\angle B$ 与 $\angle D$ 有什么关系？为什么？



(第 3 题)

在图 7–42 中，BF 是边 AB 的延长线，$\angle CBF$ 称为五边形 $ABCDE$ 的一个外角．像这样，多边形的一边与它的邻边的延长线所组成的角，叫做多边形的外角．

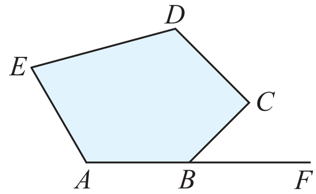


图 7–42

在每个顶点处分别取这个多边形的一个外角，这些外角的和叫做这个多边形的外角和．

做一做

1. 如图 7–43，$\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$ 是 $\triangle ABC$ 的 3 个外角．

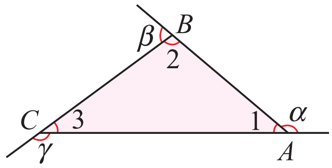


图 7–43

(1) 剪下这 3 个外角，将它们的顶点 A、B、C 重合在同一点 O，拼成图7–44．你发现了什么？

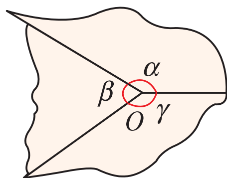


图 7–44

(2) 在图 7–43 中，

$\angle\alpha + \angle 1 = 180^\circ$，

$\angle\beta + \angle 2 = 180^\circ$，

$\angle\gamma + \angle 3 = 180^\circ$，

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$，

则 $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma =$ ______．

2. 四边形的外角和等于多少度？

(1) 仿照第 1 题中的(1)试一试．

(2) 在图 7–45 中，

$\angle\alpha + \angle 1 = 180^\circ$，

$\angle\beta + \angle 2 = 180^\circ$，

$\angle\gamma + \angle 3 = 180^\circ$，

$\angle\delta + \angle 4 = 180^\circ$，

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ \times 2$，

则 $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma + \angle\delta =$ ______．

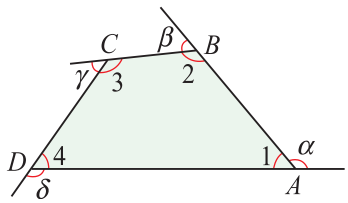


图 7–45

3. 你能求出五边形的外角和吗？

4. n 边形的外角和等于多少度？

由此,我们知道:

任意多边形的外角和等于 360°.

议一议

把图 7-46 中的五边形剪去一个角，将得到几边形？此时，多边形的内角和与外角和有什么变化？

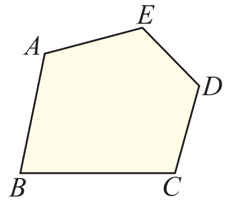


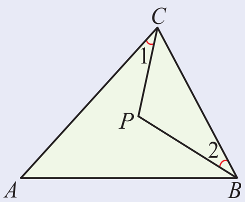
图 7-46

练一练

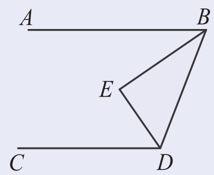
1. 一个多边形的每一个外角都是 60°，这个多边形是几边形？它的内角和等于多少度？
2. 有没有这样的多边形，它的内角和是它的外角和的 3 倍？如果有，指出它是几边形，并说明理由.

习题 7.5

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=70°$，$\angle B=50°$. 求 $\angle C$ 的度数.
2. 根据下列条件，求 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的度数.
   (1) $\angle C=20°$，$\angle A=\angle B$；
   (2) $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数之比为 $1:2:3$.
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=70°$，$\angle 1=\angle 2$. 求 $\angle BPC$ 的度数.



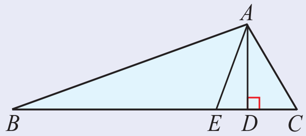
(第 3 题)



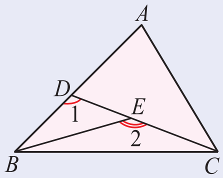
(第 4 题)

4. 如图，$AB/\!/CD$，$\angle ABD$ 与 $\angle BDC$ 的平分线相交于点 E. 求 $\angle BED$ 的度数.

5. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，AE是角平分线，$\angle B=20°$，$\angle C=60°$. 求$\angle CAD$和$\angle AEC$的度数.



(第 5 题)



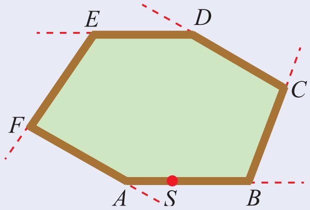
(第 6 题)

6. 如图，在$\triangle ABC$中，BE、CD相交于点E，$\angle 1$和$\angle 2$分别是哪一个三角形的外角？

设$\angle A=2\angle ACD=76°$，$\angle 2=143°$，求$\angle 1$和$\angle DBE$的度数.

7. 如图，六角螺母的棱组成一个六边形，这个六边形的内角都相等. 求它的每一个内角的度数.

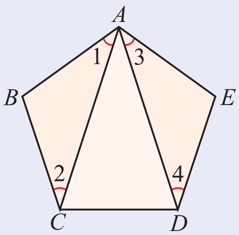

(第 7 题)



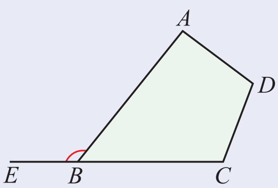
(第 8 题)

8. 如图，小明从六边形草地$ABCDEF$的边AB上一点S出发，沿着这个六边形的边步行 1 周，最后仍回到起点S处. 小明转过的角度是多少？为什么？

9. 如图，五边形$ABCDE$的内角都相等，且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 求$\angle CAD$的度数.



(第 9 题)



(第 10 题)

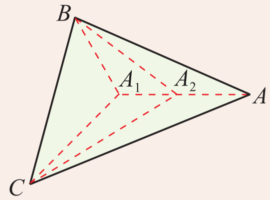
10. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A+\angle C=180°$，$\angle ABE$是四边形的一个外角. $\angle D$与$\angle ABE$相等吗？为什么？

阅读

特殊化

解决某个问题有困难时，我们可以考虑问题的特殊情形，然后利用问题的特殊情形所获得的结论或解决方法来探索问题的一般情形，最终使问题得到解决．这种解决问题的思想称为特殊化．同学们可以从下面的两个例子来体会这种思想．

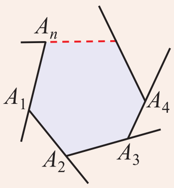
1. 做一个小实验：用橡皮筋构成$\triangle ABC$，使顶点B、C固定，顶点A可以移动（如右图）．当顶点A来回运动时就可以得到不同的三角形．这些三角形的内角和是多少度？

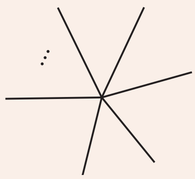


当顶点A越靠近BC，$\angle BAC$越接近$180°$，$\angle ABC$与$\angle ACB$越来越小，接近于$0°$，而当顶点A落到BC上时，这时$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$．

于是，我们猜想，一般情形下，$\triangle ABC$的内角和可能是$180°$．当然，我们已经用多种方法证实这一结论了．

2. 多边形$A_1A_2\cdots A_n$的外角和是$360°$，也可以这样来看：当多边形$A_1A_2\cdots A_n$逐步“变小”时（形状不变），多边形的外角和不变．考虑一种特殊情形：





当多边形“变小”到一点时，它的所有外角就会成为一个“周角”了，那不就是$360°$吗！

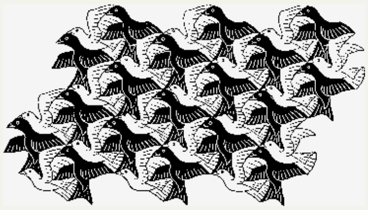
数学活动

利用平移设计图案

1. 指出下面的图案是由哪些“基本图案”平移得到的．

2. 与同学合作，收集几幅利用图形平移所形成的美丽的图案，并在全班交流．

3. 利用图形平移设计一幅漂亮的图案，并展示你的作品．



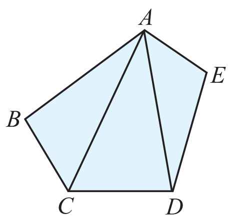
小结与思考

1. 本章通过操作实践等活动，探索了两直线平行的条件、两直线平行的性质；了解了图形经过平移，连接各组对应点所得的线段互相平行（或在同一条直线上）并且相等；体会了两条平行线之间距离的意义，学会了度量两条平行线之间距离的方法 .

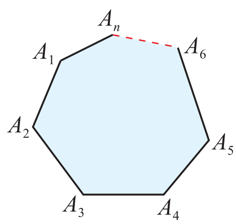
2. 本章初步研究了三角形，其知识结构可以归纳如下：

- 三角形
  - 内角与外角
    - 三角形 3 个内角的和等于 180° — 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和
    - n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot180°$ — n 边形的外角和等于 360°
  - 三边关系 — 两边之和大于第三边
  - 特殊线段
    - 角平分线
    - 中　　线
    - 高

3. 连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线 . 如图①中，AC、AD 就是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线 .



①



②

思考下列问题：

（1）如图②，n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 中，过顶点 A_1 可以画______条对角线，它们分别是：______________________________；过顶点 A_2 可以画______条对角线；过顶点 A_3 可以画______条对角线 .

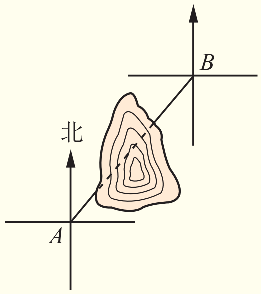
（2）过顶点 A_1 的对角线与过顶点 A_3 的对角线有相同的吗？过顶点 A_1 的对角线与过顶点 A_4 的对角线有相同的吗？

（3）你能归纳出 n 边形有多少条对角线吗？

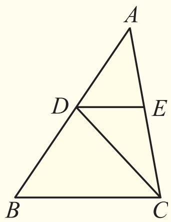
复习题

复习巩固

1. 一测量员从点 A 出发，行走 100 m 到点 B，然后向左转 $120°$，走 50 m 到点 C，再左转 $60°$，走 120 m 到点 D. AB 与 DC 平行吗？为什么？
2. 如图，要开凿一条隧道连通 A、B 两地，B 地在 A 地的北偏东 $40°$ 方向，如果 A、B 两地同时开工，那么在 B 地按怎样的方向施工，才能使隧道在山中准确对接？

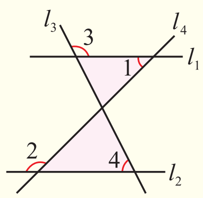


（第 2 题）

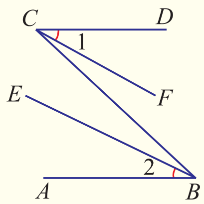


（第 3 题）

3. 如图，点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，且 $DE/\!/BC$. 你可以得到哪些结论？请说明理由.
4. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互为补角，$\angle 3 = 117°$. 求 $\angle 4$ 的度数.

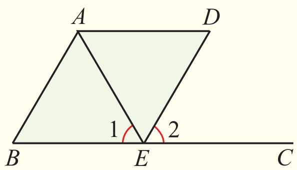


（第 4 题）

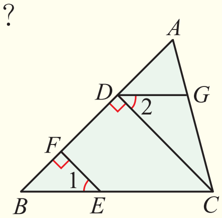


（第 5 题）

5. 如图，$AB/\!/CD$，要使 $\angle 1 = \angle 2$，还需要添加什么条件？为什么？
6. 如图，$AD/\!/BC$，点 E 在 BC 上，且 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle AED = 50°$. 想一想，$\angle BAD$ 为多少度时，$AB/\!/DE$？为什么？



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，在$\triangle ABC$中，CD是高，点E、F、G分别在BC、AB、AC上，且$EF\perp AB$，$\angle 1=\angle 2$. 试判断DG与BC的位置关系，并说明理由.

8. 下列长度的3条线段，能否首尾依次相接组成三角形？为什么？

(1) 1 cm，2 cm，4 cm;

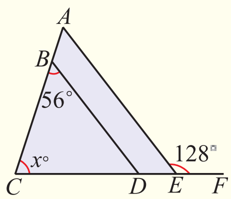
(2) 8 cm，6 cm，4 cm;

(3) 12 cm，5 cm，6 cm;

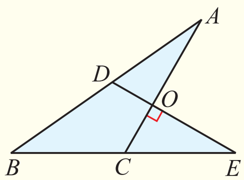
(4) 2 cm，3 cm，6 cm.

9. 一个四边形的4个内角，能不能都是锐角？都是直角？最多有几个钝角？

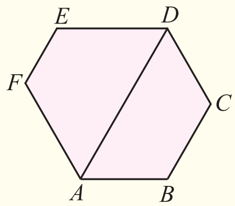
10. 如图，$AE/\!/BD$，$\angle CBD=56°$，$\angle AEF=128°$. 求x的值.



(第10题)



(第11题)



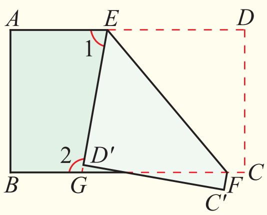
(第12题)

11. 如图，$AC\perp DE$，垂足为O，$\angle B=35°$，$\angle E=30°$. 求$\angle ACB$和$\angle A$的度数.

12. 如图，六边形$ABCDEF$的内角都相等，$\angle BAD=60°$. AB与DE有怎样的位置关系？AD与EF有怎样的位置关系？为什么？

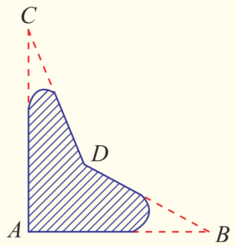
灵活运用

13. 如图，将一张长方形纸片沿EF折叠后，点D、C分别落在点D'、C'的位置，ED'的延长线与BC相交于点G. 若$\angle EFG=50°$，求$\angle 1$、$\angle 2$的度数.

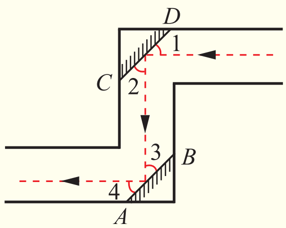


(第13题)

14. 一个零件的形状如图中阴影部分. 按规定 $\angle A$ 应等于 $90°$, $\angle B$、$\angle C$ 应分别是 $29°$和 $21°$, 检验人员量得 $\angle BDC=141°$就断定这个零件不合格. 你能说明理由吗?



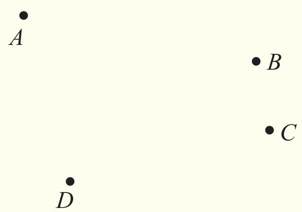
(第 14 题)



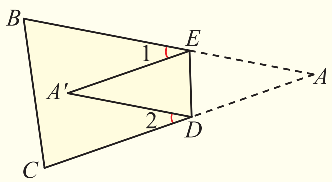
(第 15 题)

15. 潜望镜中的两面镜子 AB、CD 是互相平行放置的 (如图), 光线经过镜子反射时, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$. 请解释为什么进入潜望镜的光线与离开潜望镜的光线是互相平行的?

16. 如图, 为解决 A、B、C、D 4 个村庄的用水问题, 政府准备投资修建一个蓄水池, 使蓄水池与 4 个村庄的距离的和最小. 请你画图确定蓄水池 H 的位置, 并说明理由.



(第 16 题)



(第 17 题)

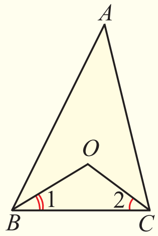
17. 如图, 把$\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠, 使点 A 落在四边形 $BCDE$ 内部点 A'的位置. $\angle A'$与$\angle 1+\angle 2$ 之间存在怎样的数量关系? 为什么?

探索研究

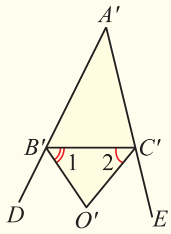
18. (1) 如图①, 在$\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线相交于点 O, $\angle A=40°$, 求$\angle BOC$ 的度数;

(2) 如图②, $\triangle A'B'C'$两个外角$\angle C'B'D$、$\angle B'C'E$ 的平分线相交于点 O', $\angle A'=40°$, 求$\angle B'O'C'$的度数;

(3) 由(1)、(2),可以发现$\angle BOC$与$\angle B'O'C'$之间有怎样的数量关系?若$\angle A=\angle A'=n°$,$\angle BOC$与$\angle B'O'C'$之间是否还具有这样的关系?为什么?



①



②

(第 18 题)

第八章 幂的运算

数的世界充满着神奇，
幂的运算方便了“大”数的处理．

$(3\times10^{8})\times(5\times10^{2})$

光在真空中的速度约是 3×10^8 m/s，光在真空中穿行 1 年的距离称为 1 光年．请你算算：

(1) 1 年以 3×10^7 s 计算，1 光年约是多少千米？

(2) 银河系的直径达 10 万光年，约是多少千米？

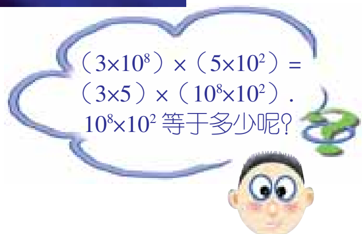
(3) 如果一架飞机的飞行速度为 1 000 km/h，那么光的速度是这架飞机速度的多少倍？

● 本章将学习同底数幂的乘法、除法以及幂的乘方、积的乘方．

8.1 同底数幂的乘法

太阳光照射到地球表面所需的时间约是 5×10^2 s，光的速度约是 3×10^8 m/s．地球与太阳之间的距离约是多少？

做一做



1. 计算下列各式：

   $10^2\times10^4$；　$10^4\times10^5$；$10^3\times10^5$．

2. 怎样计算 $10^m\cdot10^n$（m、n 是正整数）？

3. 当 m、n 是正整数时，$2^m\cdot2^n$ 等于什么？$\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 呢？

对于任意的底数 a，当 m、n 是正整数时，

$$a^m\cdot a^n=(\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{m\text{个}a})\cdot(\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}a})$$

$$=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{(m+n)\text{个}a}$$

$$=a^{m+n}.$$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m、n 是正整数）．

同底数幂相乘，底数不变，指数相加．

例 1 计算：

(1) $(-8)^{12}\times(-8)^5$；　　(2) $x\cdot x^7$；

(3) $-a^3\cdot a^6$；　　(4) $a^{3m}\cdot a^{2m-1}$（m 是正整数）.

解：(1) $(-8)^{12}\times(-8)^5=(-8)^{12+5}=(-8)^{17}=-8^{17}$；

(2) $x\cdot x^7=x^{1+7}=x^8$；

(3) $-a^3\cdot a^6=-a^{3+6}=-a^9$；

(4) $a^{3m}\cdot a^{2m-1}=a^{3m+2m-1}=a^{5m-1}$.

例 2 一颗卫星绕地球运行的速度是 7.9×10^3 m/s，求这颗卫星运行 1 h 的路程.

解：$(7.9\times10^3)\times(3.6\times10^3)$

$=(7.9\times3.6)\times(10^3\times10^3)$

$=2.844\times10^7$(m).

答：这颗卫星运行 1 h 的路程是 2.844×10^7 m.

议一议

m、n、p 是正整数，你会计算 $a^m\cdot a^n\cdot a^p$ 吗？

练一练

1. 计算：

(1) $a^8\cdot a^3$；　　(2) $x^5\cdot x$；

(3) $(-2)^{10}\times(-2)^{13}$；　　(4) $-b^6\cdot b^6$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

(1) $x^3\cdot x^3=2x^6$；　　(2) $x^4\cdot x^2=x^8$.

3. 计算：

(1) $x^4\cdot x^6+x^5\cdot x^5$；　　(2) $a\cdot a^7-a^4\cdot a^4$.

4. 填空：

(1) $a^7\cdot a^{(\quad)}=a^{12}$；　　(2) $a^n\cdot a\cdot a^{(\quad)}=a^{2n}$.

计算器操作

例 计算 $(5.6\times10^8)\times(7.1\times10^3)$.

操作 5 . 6 Exp* 8 × 7 . 1 Exp 3 =

显示 3.976×10^{12}.

* Exp 指数显示方式选择键.

习题 8.1

1. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{10}\right)^5\times\left(\frac{1}{10}\right)^7$；　　(2) $a^{12}\cdot a$；

(3) $-b^2\cdot b^5$；　　(4) $a^{m+1}\cdot a^{m-1}$（m 是大于 1 的整数）.

2. 计算：

(1) $3^4\times3^6\times3$；　　(2) $a\cdot a^4\cdot a^5$.

3. 计算：

(1) $(p-q)^5\cdot(q-p)^2$；

(2) $(s-t)^m\cdot(s-t)^{m+n}\cdot(t-s)$（$m$、$n$ 是正整数）；

(3) $x^n\cdot x^{n+1}+x^{2n}\cdot x$（$n$ 是正整数）.

4. 已知 $a^m=8$，$a^n=32$，求 a^{m+n} 的值.

5. 在银河系中，恒星“心宿二”的体积约是太阳的 2.2×10^8 倍，太阳的体积约是地球的 1.3×10^6 倍，那么“心宿二”的体积是地球的多少倍？

8.2 幂的乘方与积的乘方

做一做

计算下列各式：

(1) $(2^3)^2=$__________；　(2) $(a^4)^3=$__________；

(3) $(a^m)^5=$__________.

从上面的计算中，你发现了什么规律？

对于任意的底数 a，当 m、n 是正整数时，

$$(a^m)^n=\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}^{n\text{个}a^m}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}=a^{mn}.$$

$(a^m)^n=a^{mn}$ (m、n 是正整数).

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 1 计算：

(1) $(10^6)^2$；　(2) $(a^m)^4$ (m 是正整数)；

(3) $-(y^3)^2$；　(4) $(-x^3)^3$.

解： (1) $(10^6)^2=10^{6\times2}=10^{12}$；

(2) $(a^m)^4=a^{m\times4}=a^{4m}$；

(3) $-(y^3)^2=-y^{3\times2}=-y^6$；

(4) $(-x^3)^3=-x^{3\times3}=-x^9$.

例 2 计算：

(1) $x^2 \cdot x^4 + (x^3)^2$；　　(2) $(a^3)^3 \cdot (a^4)^3$.

解：(1) $x^2 \cdot x^4 + (x^3)^2 = x^{2+4} + x^{3\times 2} = x^6 + x^6 = 2x^6$；

(2) $(a^3)^3 \cdot (a^4)^3 = a^{3\times 3} \cdot a^{4\times 3} = a^9 \cdot a^{12} = a^{9+12} = a^{21}$.

练一练

1. 计算：

   (1) $(10^4)^4$；　　(2) $(x^5)^4$；

   (3) $-(a^2)^5$；　　(4) $(-2^3)^{20}$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

   (1) $(a^3)^2 = a^{3+2} = a^5$；　　(2) $(-a^3)^2 = -a^6$.

3. 计算：

   (1) $(m^4)^2 + m^5 \cdot m^3$；　　(2) $(a^3)^5 \cdot (a^2)^2$.

4. 如果一个正方体的棱长是 10^2 cm，那么它的体积是多少？

5. 填空：$a^{12} = (a^3)^{(\ )} = (a^2)^{(\ )} = a^3 \cdot a^{(\ )}$.

做一做

计算:

(1) $(3\times 2)^3 =$________，　$3^3 \times 2^3 =$________；

(2) $[3\times(-2)]^3 =$________，　$3^3 \times (-2)^3 =$________；

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\right)^3 =$________，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 =$________.

你发现了什么规律？换几个数再试试,请与同学交流.

对于任意的底数 a、b，当 n 是正整数时，

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n\text{ 个 }ab}\\ &= \overbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}^{n\text{ 个 }a}\cdot\overbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}^{n\text{ 个 }b}\\ &= a^n b^n.\end{aligned}$$

$(ab)^n = a^n b^n$（n 是正整数）.

积的乘方，把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

例 3 计算：

（1）$(5m)^3$；　　（2）$(-xy^2)^3$.

解：（1）$(5m)^3 = 5^3 \cdot m^3 = 125m^3$；

（2）$(-xy^2)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 = -x^3y^6$.

议一议

对于任意的底数 a、b、c，当 n 是正整数时，$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ 成立吗？

例 4 计算：

（1）$(3xy^2)^2$；　　（2）$(-2ab^3c^2)^4$.

解：（1）$(3xy^2)^2 = 3^2 \cdot x^2 \cdot (y^2)^2 = 9x^2y^4$；

（2）$(-2ab^3c^2)^4 = (-2)^4 \cdot a^4 \cdot (b^3)^4 \cdot (c^2)^4 = 16a^4b^{12}c^8$.

例 5 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$（其中 V、r 分别表示球的体积和半径）. 木星可以近似地看成球体，它的半径约是 7.15×10^4 km，木星的体积大约是多少（单位：km^3，$\pi \approx 3.14$）？

解：
$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \times (7.15 \times 10^4)^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \times 7.15^3 \times 10^{12} \\
&\approx 1.53 \times 10^{15}(\text{km}^3).
\end{aligned}
$$

答： 木星的体积大约是 1.53×10^{15} km^3.

练一练

1. 计算：

（1）$(-ab)^3$；　　（2）$(x^2y^3)^4$；

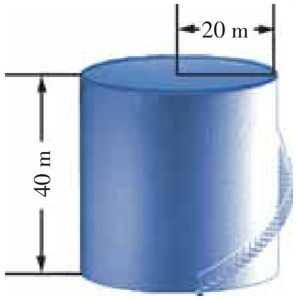
（3）$(2 \times 10^3)^2$；　　（4）$(-2a^3y^4)^3$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

（1）$(xy^2)^3 = xy^6$；　　（2）$(-2b^2)^2 = -4b^4$.

3. 计算：$a^5 \cdot a^3 + (2a^2)^4$.

4. 如图，一圆柱形的储油罐内壁半径 r 是 20 m，高 h 是 40 m，它的容积是多少？如果该储油罐最大储油高度为 30 m，最多能储油多少(单位：L，1 m^3 合 10^3 L)？



(第 4 题)

计算器操作

例　计算$(20^5)^2$.

操作　(2 0 ^ 5) x^2 =

显示　1.024×10^{13}.

习题 8.2

1. 计算：

(1) $(a^3)^6$;　　(2) $-(x^5)^2$;

(3) $[(-m)^2]^5$;　　(4) $(-a^3b^2)^4$;

(5) $(-3a^2b^3c)^3$;　　(6) $-(-2x^3y)^3$.

2. 计算：

(1) $(a^4)^2+a^6a^2$;　　(2) $(m^3)^3\cdot(m^3)^2$;

(3) $(a^2)^3\cdot(a^4)^4$;　　(4) $(b^4)^2\cdot b^2$.

3. 计算：

(1) $(a^3)^2+(a^2)^3-a\cdot a^5$;　　(2) $(-2a^2)^2\cdot a^4-(-5a^4)^2$.

4. 填空：

(1) $9^3=3^{(\quad)}$;　　(2) $3^3\times9^9=3^3\times3^{(\quad)}=3^{(\quad)}$.

5. 计算：

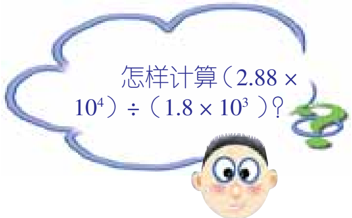
(1) $(0.25)^{100}\times4^{101}$;　　(2) $3^{14}\times\left(-\dfrac{1}{9}\right)^7$.

6. (1) 地球可以近似地看成球体，半径约为 6.37×10^3 km，地球的体积大约为多少？

(2) 你会计算地球的表面积吗？请你查阅资料，找出计算球体表面积的公式，再进行计算.

8.3 同底数幂的除法

一颗人造地球卫星运行的速度是 2.88×10^4 km/h，一架喷气式飞机飞行的速度是 1.8×10^3 km/h．这颗人造地球卫星的速度是这架喷气式飞机速度的多少倍？



做一做

计算下列各式：

（1）$10^6 \div 10^3$；（2）$a^7 \div a^4$（$a \neq 0$）；（3）$a^{100} \div a^{70}$（$a \neq 0$）．

你发现了什么？

当 $a \neq 0$，m、n 是正整数，且 $m > n$ 时，

$$a^m \div a^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{(m-n)\text{个}a} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n\text{个}a}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}} = a^{m-n}.$$

> $a^m \div a^n = a^{m-n}$（m、n 是正整数，$m > n$）．
> 同底数幂相除，底数不变，指数相减．

例 1 计算：

（1）$a^6 \div a^2$；　　（2）$(-b)^8 \div (-b)$；

（3）$(ab)^4 \div (ab)^2$；　　（4）$t^{2m+3} \div t^2$（m 是正整数）．

解：（1）$a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$；

（2）$(-b)^8 \div (-b) = (-b)^{8-1} = (-b)^7 = -b^7$；

（3）$(ab)^4 \div (ab)^2 = (ab)^{4-2} = (ab)^2 = a^2b^2$；

（4）$t^{2m+3} \div t^2 = t^{2m+3-2} = t^{2m+1}$．

练一练

1. 计算：

(1) $3^{15}\div 3^{13}$；　(2) $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{7}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{4}$；　(3) $y^{14}\div y^{2}$；

(4) $(-a)^{5}\div(-a)$；　(5) $(-xy)^{5}\div(-xy)^{2}$；　(6) $a^{10n}\div a^{2n}$（n 是正整数）.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正 .

(1) $a^{8}\div a^{4}=a^{2}$；　(2) $t^{10}\div t^{9}=t$；

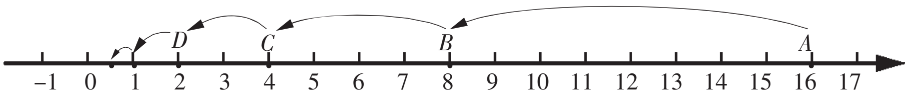
(3) $m^{5}\div m=m^{5}$；　(4) $(-z)^{6}\div(-z)^{2}=-z^{4}$.

3. 请你解答本节开始时提出的问题 .

做一做

$16=2^{4}$；$8=2^{(\ )}$；$4=2^{(\ )}$；$2=2^{(\ )}$.

幂是如何变化的？



指数是如何变化的？

想一想

猜想

$$1=2^{(\ )}.$$

我们知道

$$2^{3}\div 2^{3}=8\div 8=1.$$

如果用同底数幂的除法性质，那么

$$2^{3}\div 2^{3}=2^{3-3}=2^{0}.$$

我们规定:

> $a^{0}=1$（$a\neq 0$）.
> 任何不等于 0 的数的 0 次幂等于 1 .

议一议

你会计算 $2^{3}\div 2^{4}$ 吗？

$$2^{3}\div 2^{4}=\frac{2\times 2\times 2}{2\times 2\times 2\times 2}=\frac{1}{2}.$$

如果用同底数幂的除法性质，那么

$$2^{3}\div 2^{4}=2^{3-4}=2^{-1}.$$

我们规定：

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad (a\neq 0，n \text{ 是正整数}).$$

任何不等于 0 的数的 $-n$（n 是正整数）次幂，等于这个数的 n 次幂的倒数．

对于零指数幂和负整数指数幂，幂的运算性质仍然适用．

例 2 用小数或分数表示下列各数：

（1）4^{-2}；　（2）-3^{-3}；　（3）3.14×10^{-5}．

解：（1）$4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$；　（2）$-3^{-3}=-\frac{1}{3^3}=-\frac{1}{27}$；

（3）$3.14\times10^{-5}=3.14\times\frac{1}{10^5}=3.14\times0.000\,01=0.000\,031\,4$．

练一练

1. 用小数或分数表示下列各数：

（1）10^{-2}；　（2）$(-0.1)^0$；　（3）5^{-1}；　（4）2.1×10^{-3}．

2. 把下列小数写成负整数指数幂的形式：

（1）0.001；　（2）0.000 001；　（3）$\frac{1}{64}$；　（4）$\frac{1}{81}$．

3. 某种细胞可以近似地看成球体，它的半径是 5×10^{-6} m．用小数表示这个半径．

太阳的半径约为 700 000 000 m．太阳的主要成分是氢，而氢原子的半径大约只有 0.000 000 000 05 m．

用科学记数法，我们可以把 700 000 000 m 写成 7×10^8 m．类似地，0.000 000 000 05 m 可以写成 5×10^{-11} m．

一般地，一个正数利用科学记数法可以写成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqslant a<10$，n 是整数．

例 3 人体中红细胞的直径约为 0.000 007 7 m，而流感病毒的直径约为 0.000 000 08 m，用科学记数法表示这两个量．

解： 0.000 007 7 m $=7.7\times10^{-6}$ m，0.000 000 08 m $=8\times10^{-8}$ m．

例 4 在显微镜下，一种细胞的截面可以近似地看成圆，它的半径约为 7.80×10^{-7} m，试求这种细胞的截面面积（$\pi\approx3.14$）.

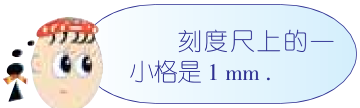
解：截面面积 $S=\pi\times(7.80\times10^{-7})^2\approx3.14\times6.08\times10^{-13}$

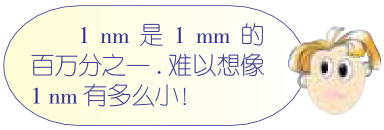
$\approx1.91\times10^{-12}\ (\mathrm{m}^2)$.

答：该细胞的截面面积约是 $1.91\times10^{-12}\ \mathrm{m}^2$.

纳米（nanometer **简记为** nm）是长度单位，1 纳米为十亿分之一米.

$$1\ \mathrm{nm}=10^{-9}\ \mathrm{m}.$$





将直径为 1 nm 的颗粒放在 1 个铅球上，约相当于将 1 个铅球放在地球上.

练一练

1. 用科学记数法表示下列各数：

   0.000 17，0.000 021 5，0.000 000 608 9，−0.001 000 2 .

2. 用科学记数法表示下列结果：

   （1）肥皂泡表面厚度大约是 0.000 7 mm，换算成以 m 为单位是多少？

   （2）蚕丝是最细的天然纤维，截面直径约 10 μm [注]，截面面积约是多少（单位：cm^2）？

习题 8.3

1. 计算：

   （1）$a^5\div a^3$；　　（2）$m^{10}\div m$；

   （3）$(s^5)^2\div s^5$；　　（4）$(-s)^7\div(-s)^2$；

   （5）$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\div\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

2. 填空：

   （1）$2^3\times(\quad)=2^6$；　　（2）$(\quad)\cdot a^2=a^6$；

[注] μm 读作微米，1 μm=10^{-6} m .

(3) $3^{10}\div($　　$)=3^{4}$；　　(4) $($　　$)\div a^{2}=a^{6}$.

3. 用小数或分数表示下列各数：

(1) 4^{-2}；　　(2) $\left(\frac{15}{16}\right)^{0}$；

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$；　　(4) 1.027×10^{-6}.

4. 计算：

(1) $5^{-2}\div2^{-3}$；　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$；

(3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{0}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$；　　(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\div(-2)^{3}\times(-2)^{-2}$.

5. 鸵鸟是世界上最大的鸟，每枚鸵鸟蛋的质量约 8×10^{2} g；蜂鸟是世界上最小的鸟，每枚蜂鸟蛋的质量约 2×10^{2} mg. 1 枚鸵鸟蛋的质量相当于多少枚蜂鸟蛋的质量?

6. 水珠不断地滴在一块石头上，经过 40 年，石头上形成了一个深为 4×10^{-2} m 的小洞. 问平均每个月小洞的深度增加多少(单位:m,用科学记数法表示)?

7. 据测算，5 万粒芝麻质量约 200 g，那么 1 粒芝麻的质量约为多少(用科学记数法表示)?

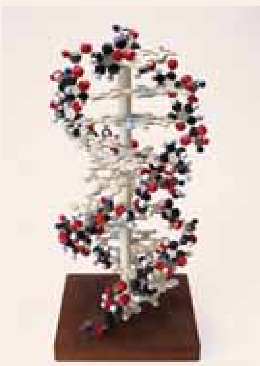
阅读

基　因

基因是决定一个生物物种的所有生命现象的遗传因子. 植物的高矮、果实的大小、动物的体形、动物的食性等主要是由基因控制的.

不同生物的基因个数往往不同. 例如，人的基因约有 3.0×10^{4} 个；线虫有 1.9×10^{4} 个左右；真菌有 6×10^{3} 个左右；结核病菌有 4×10^{3} 个左右.

DNA 是每一个生物携带自身基因的载体，它是遗传物质脱氧核糖核酸的英文简称. DNA 分子的直径只有 2×10^{-7} cm，DNA 分子像一架向右盘旋的螺旋形梯子（如右图），生物的遗传信息大多储存在 DNA 分子上.


DNA 的双螺旋结构模型

如果你想更全面地了解基因，请登录互联网的相关网站查阅.

数学活动

生活中的“较大数”与“较小数”

活动一 1. 估测自己的步长；

2. 估计你 1 h 大约走多少步？走 10^6 步要多少小时？

3. 从上海到北京约 1 400 km，如果从上海出发步行到北京，大约要走多少小时？

活动二 1. 测量数学课本的厚度；

2. 估算数学课本一张纸的厚度.

活动三 1. 测量教室的面积；

2. 10^6 m² 的面积相当于多少间教室的面积？

3. 根据你班的学生数，估计这么多间教室可供多少学生上课？

请你通过各种方式（上网、查阅资料等）收集生活中的“较大数”与“较小数”3 个以上，用你熟悉的事物来描述，并与同学交流.

小结与思考

1. 在本章里，我们学习了同底数幂的乘法、除法、幂的乘方、积的乘方，说说这些运算性质的联系和区别.

2. 想一想，本章中幂的运算性质是如何得到的？

3. 根据零指数幂、负整数指数幂的意义，不论 m、n 的大小关系，对于任意正整数 m、n，$a^m \div a^n = a^{m-n}$ 总成立.

4. 根据负整数指数幂的意义，你能用同底数幂的乘法性质推导出同底数幂除法的性质吗？

5. 用数 3、4、5 组成一个算式，使运算结果尽可能大或尽可能小.

复习题

复习巩固

1. 计算：

(1) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^3 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$；　　(2) $(a-b)^4 \cdot (a-b)^2$；

(3) $(-x^3)^4$；　　(4) $(-3x)^5 \div (-3x)$；

(5) $(3x^2)^3$；　　(6) $(-2xy^2z)^2$；

(7) $m^3 \cdot m \cdot (m^2)^3$;　　(8) $(-a^2)^3 \cdot (-a^3)^2$;

(9) $t^{m+1} \cdot t + (-t)^2 \cdot t^m$（$m$ 是整数）;

(10) $(x^n)^2 + (x^2)^n - x^n \cdot x^2$ (n 是整数).

2. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times 2^{-4}$;　　(2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{3}{4}\right)^{0}$;

(3) $(-9)^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;　　(4) $2^{-2} \times (4^3 \times 8^0)$.

3. “神威 1 号”巨型计算机运算速度达 3.84×10^{11} 次/s．它工作 1 h 可进行多少次运算？

4. 1 cm^3 空气的质量是 1.293×10^{-3} g，那么 1 m^3 空气的质量是多少？

5. 某种花粉颗粒的直径约是 30 μm，多少个这样的花粉颗粒顺次排列能达到 1 m(用科学记数法表示)？

（第 5 题）

灵活运用

6. 计算：

(1) $4 \times 2^2 \times 8^4$;　　(2) $0.2^4 \times 0.4^4 \times 12.5^4$;

(3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{100} \times 3^{101}$;　　(4) $\frac{2.1^{10} \times 3^4}{0.3^{11} \times 7^{10}}$.

7. 已知 $a = -(0.3)^2, b = -3^{-2}, c = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}, d = \left(-\frac{1}{3}\right)^{0}$，比较 a、b、c、d 的大小，并用“<”号连接起来．

8. 地球上海洋总面积约 3.6×10^8 km^2，海洋总面积是地球表面积的百分之几？按海洋的海水平均深度 3.7×10^3 m 计算，求地球上海水的体积(用科学记数法表示)．

探索研究

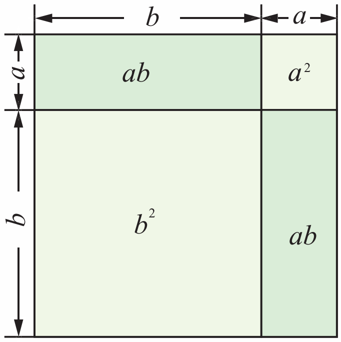
9. 已知 a、b 是有理数，且 $a^b = 1$，求 a、b．

10. (1) 计算：1^5，2^5，3^5，4^5，5^5，…，19^5；

(2) 127^5 的个位上的数字是几？

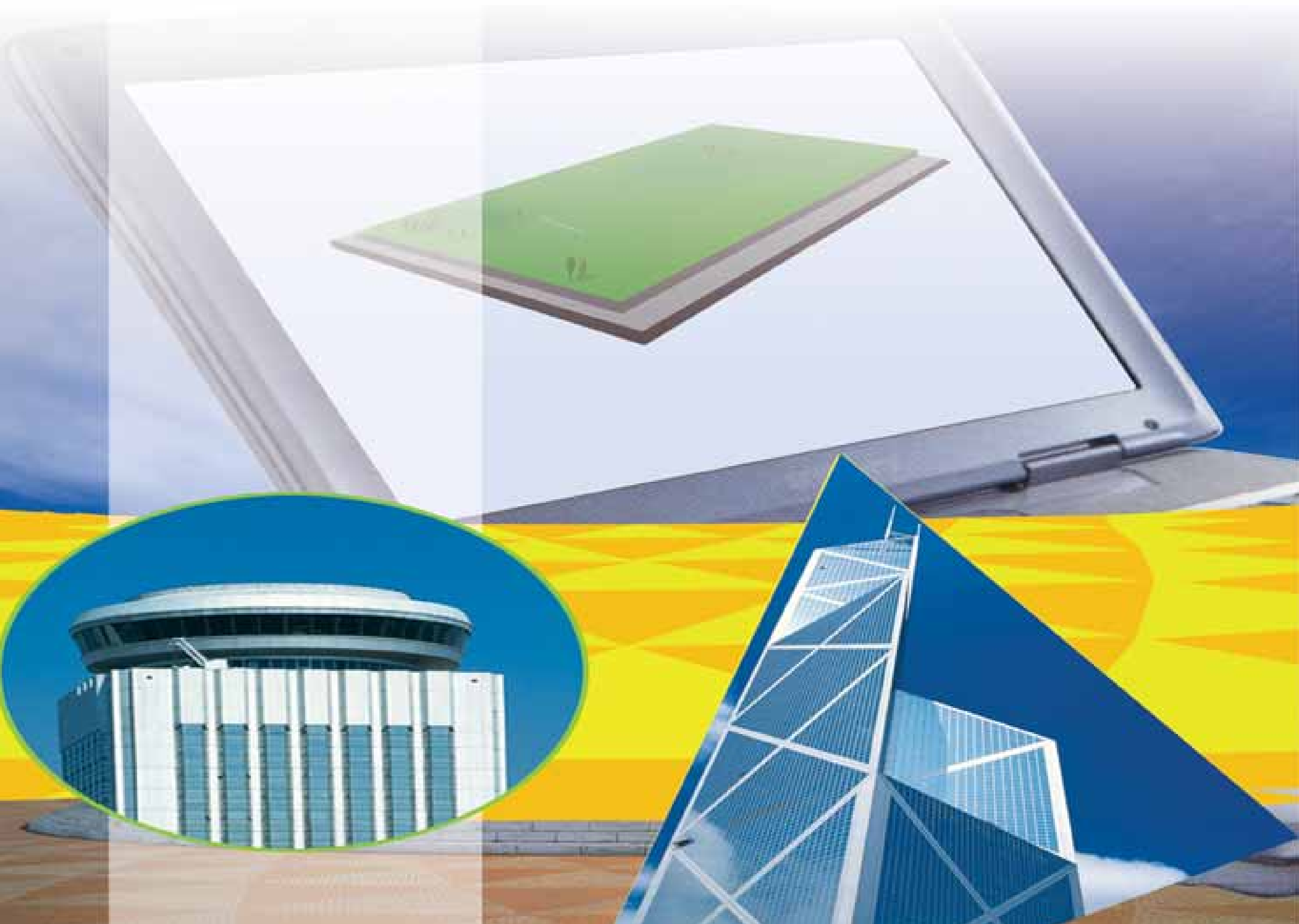
(3) 58^{11}、73^{13} 的个位上的数字分别是几？

第九章 从面积到乘法公式

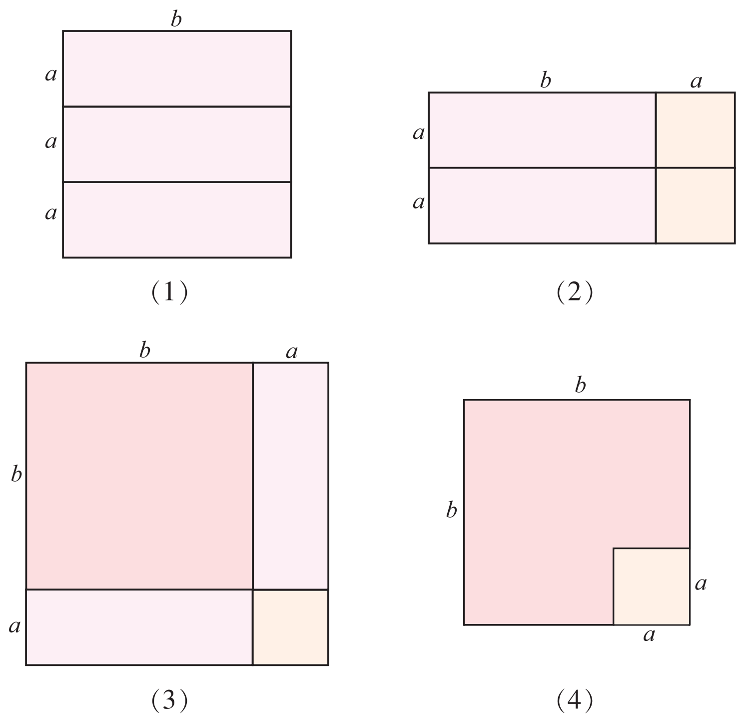


$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

拼图活动，引发我们的灵感，
运算推演，证实我们的猜想．



（1）用若干块长方形和正方形硬纸片，拼成图(1)~(3)，算算它们的面积分别是多少？



（2）如图(4)，将一块小正方形硬纸片放置在大正方形硬纸片上，计算未盖住部分的面积．

● 本章将学习单项式乘法、多项式乘法、乘法公式及多项式的因式分解．

9.1 单项式乘单项式

将几台型号相同的电视机叠放在一起组成“电视墙”，计算图 9–1 中这块“电视墙”的面积．

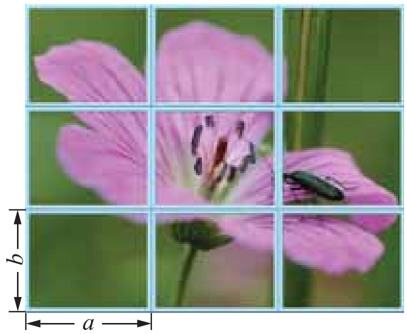
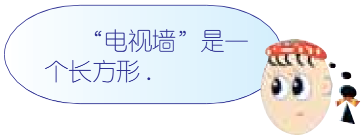
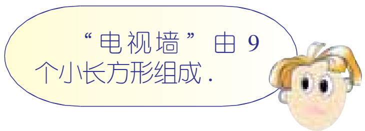


图 9–1





如果把图 9–1 的“电视墙”看成一个大长方形，它的长为 $3a$、宽为 $3b$，那么它的面积为 $3a \cdot 3b$．

如果把图 9–1 的“电视墙”看成是由 9 个小长方形组成的，那么它的面积为 $9ab$．

由此得到 $3a \cdot 3b = 9ab$．

一般地，对于任意 a、b，运用乘法交换律、结合律，我们可以计算两个单项式的乘积．比如：

$3a \cdot 3b$

$= 3 \times 3 \cdot a \cdot b$　　　（乘法交换律）

$= (3 \times 3) \cdot (a \cdot b)$　　（乘法结合律）

$= 9ab$．

计算下列各式，并说明理由．

（1）$2a^2b \cdot 3ab^2$；　（2）$4ab^2 \cdot 5b$；　（3）$6x^3 \cdot (-2x^2y)$．

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式．

例 计算：

（1）$-\frac{1}{3}a^2\cdot(-6ab)$；　　（2）$(2x)^3\cdot(-3xy^2)$．

解：（1）$-\frac{1}{3}a^2\cdot(-6ab)=\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-6)\right]\cdot(a^2\cdot a)\cdot b=2a^3b$；

（2）$(2x)^3\cdot(-3xy^2)=8x^3\cdot(-3xy^2)=[8\times(-3)](x^3\cdot x)y^2=-24x^4y^2$．

练一练

1. 计算：

（1）$0.25a^2\cdot 4a$；　　（2）$\frac{3}{4}a^2b^3\cdot\left(-\frac{8}{9}abc\right)$；

（3）$3a^2bc\cdot\left(-\frac{1}{7}ab\right)$；　　（4）$-0.1abc\cdot 10ab^2c$；

（5）$(-x^2)^2\cdot(2xy^2)^2$；　　（6）$-8a^2b\cdot(-a^3b^2)\cdot\frac{1}{4}b^2$．

2. 一个正方体的棱长是 1.5×10^2 cm．

（1）它的表面积是多少？

（2）它的体积是多少？

习题 9.1

1. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正．

（1）$3x^3\cdot(-2x^2)=5x^5$；　　（2）$3a^2\cdot 4a^2=12a^2$；

（3）$3b^3\cdot 8b^3=24b^9$；　　（4）$-3x\cdot 2xy=6x^2y$．

2. 计算：

（1）$(a^2)^2\cdot(-2ab)$；

（2）$5m\cdot\left(-\frac{9}{4}abm\right)\cdot(-am)$；

（3）$0.5a^{n-1}b^{m-2}c\cdot(-0.2a^2b^3)$（$m$、$n$ 是整数）；

（4）$-10\times(0.3\times10^2)\times(0.4\times10^5)$；

（5）$\frac{1}{4}x^3y^2\cdot(-2xy^2)+(-2x^2y)\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)\cdot 3xyz$．

3. 填空：

（1）(　　)$\cdot(-3xy)=-12x^2y$；　　（2）$2ab\cdot$(　　)$=-6a^2bc$．

9.2 单项式乘多项式

计算图 9–2 的面积，并把你的算法与同学交流．

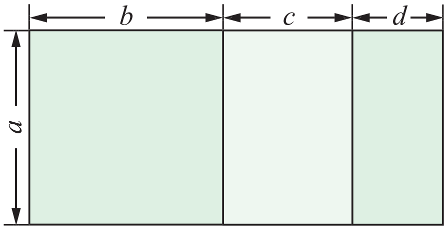


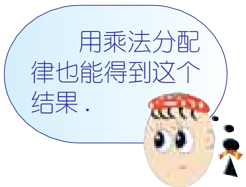
图 9–2

如果把图 9–2 看成一个大长方形，它的长为 $b+c+d$、宽为 a，那么它的面积为 $a(b+c+d)$．

如果把图 9–2 看成是由 3 个小长方形组成的，那么它的面积为 $ab+ac+ad$．

由此得到

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$



一般地，对于任意的 a、b、c、d，由乘法分配律同样可以得到

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$

计算下列各式，并说明理由．

(1) $a(5a+3b)$；　　(2) $(x-2y)\cdot 2x$．

单项式与多项式相乘，用单项式乘多项式的每一项，再把所得的积相加．

例 1 计算：

（1）$(-3x^2)\cdot(4x-3)$；　　（2）$\left(\frac{3}{4}ab^2-3ab\right)\cdot\frac{1}{3}ab$.

解：（1）$(-3x^2)\cdot(4x-3)=(-3x^2)\cdot(4x)+(-3x^2)\cdot(-3)=-12x^3+9x^2$；

（2）$\left(\frac{3}{4}ab^2-3ab\right)\cdot\frac{1}{3}ab$

$=\frac{3}{4}ab^2\cdot\frac{1}{3}ab+(-3ab)\cdot\frac{1}{3}ab$

$=\frac{1}{4}a^2b^3-a^2b^2$.

例 2 如图 9–3，一长方形地块用来建造住宅、广场、商厦．求这块地的面积．

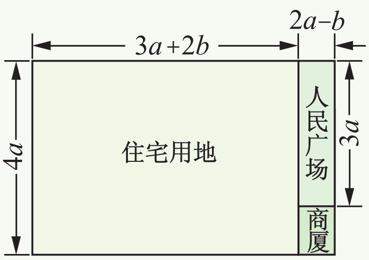


图 9–3

解：长方形地块的长为 $(3a+2b)+(2a-b)$、宽为 $4a$，这块地的面积为

$4a\cdot[(3a+2b)+(2a-b)]$

$=4a\cdot(5a+b)$

$=4a\cdot5a+4a\cdot b$

$=20a^2+4ab$.

答：这块地的面积为 $20a^2+4ab$.

练一练

1. 计算：

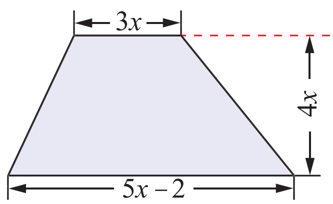
（1）$(q+r-13)\cdot a$；　　（2）$-3xy\cdot(4y-2x-1)$；

（3）$-\frac{1}{2}x^3y^2\cdot(4y+8xy^3)$；　　（4）$(3a^3b-2ab^2+ab^3)\cdot(-2ab)$；

（5）$x(y-5)+y(3-x)$；

（6）$a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$.

2. 如图，求梯形的面积．



（第 2 题）

3. 填空：

（1）（　　）$\cdot(3x-4)=3x^2-4x$；

（2）$2x\cdot$（　　　）$=2x^2+14x$.

习题 9.2

1. 计算：

(1) $\frac{1}{2}ab^2\cdot(2a^2b-3ab^2)$；

(2) $x(2x-5)+3x(x+2)-5x(x-1)$；

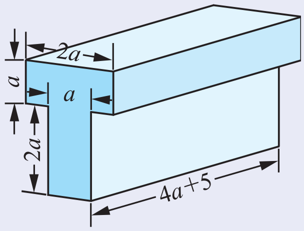
(3) $a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$；

(4) $a(a^2-3)+a^2(a+3)-3a(a^2-a-1)$；

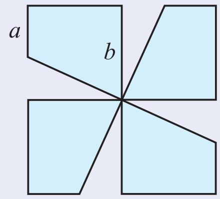
(5) $(12x^n-16y^n)\cdot 3xy-\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y\right)\cdot 6x^ny^n$ (n 是整数).

2. 已知 $A=-2ab$，$B=4ab(a-b)$，求 $A\cdot B$.

3. 如图，计算一段 T 形钢材的体积.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，1 个正方形剪去 4 个相同的直角三角形后，余下 4 个完全相同的梯形.求：

(1) 4 个梯形的面积之和；

(2) 剪掉的每一个三角形的面积.

5. 填空：

(1) (　　) $\cdot(-2a+3b)=12a^2b-18ab^2$；

(2) $ab(a^2+$ ____ $+3)=a^3b+2a^2b+3ab$；

(3) $2ab^2(3a^2-$ ____ $+$ ____ $)=6a^3b^2-4a^2b^3+10ab^4$；

(4) $2a^2b^2($ ____ $+$ ____ $-$ ____ $)=2a^2b^2+8a^3b^3-16a^4b^4$.

6. 已知 $m\cdot(c+d)=mc+md$，如果将 m 换成 $(a+b)$，你能计算 $(a+b)\cdot(c+d)$ 吗？

9.3 多项式乘多项式

计算图 9–4 的面积，并把你的算法与同学交流 .

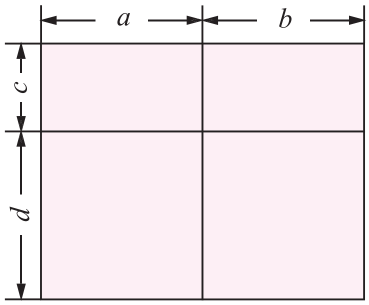


图 9–4

如果把图 9–4 看成 1 个大长方形，那么它的面积为$(a+b)\cdot(c+d)$.

如果把图 9–4 看成是由 4 个小长方形组成的，那么它的面积为 $ac+ad+bc+bd$.

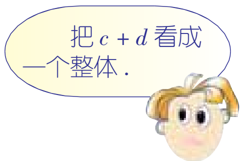
由此得到

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

一般地,对于任意的 a、b、c、d，利用单项式乘多项式法则可以得到

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

上面的运算过程,也可以表示为



$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

做一做

计算下列各式，并说明理由 .

(1) $(a+4)(a+3)$；　　(2) $(3x+1)(x-2)$.

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加 .

例1 计算：

(1) $(x+2)(x-3)$；　　(2) $(x-2)(x-3)$.

解：(1) $(x+2)(x-3)$

$=x\cdot x+x\cdot(-3)+2\cdot x+2\cdot(-3)$

$=x^2-3x+2x-6$

$=x^2-x-6$；

(2) $(x-2)(x-3)$

$=x\cdot x+x\cdot(-3)+(-2)\cdot x+(-2)\cdot(-3)$

$=x^2-3x-2x+6$

$=x^2-5x+6$.

一般地，$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$.

例2 计算：

(1) $(2x-5y)(3x-y)$；　　(2) $n(n+1)(n+2)$.

解：(1) $(2x-5y)(3x-y)$

$=2x\cdot 3x+2x\cdot(-y)+(-5y)\cdot 3x+(-5y)(-y)$

$=6x^2-2xy-15xy+5y^2$

$=6x^2-17xy+5y^2$；

(2) $n(n+1)(n+2)$

$=n(n^2+2n+n+2)$

$=n(n^2+3n+2)$

$=n^3+3n^2+2n$.

练一练

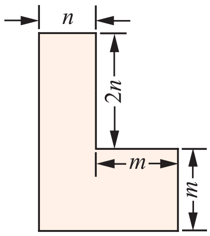
1. 计算：

(1) $(x+1)(2x-3)$；　　(2) $(3m+2n)(7m-6n)$；

(3) $(7-3x)(7+3x)$；　　(4) $n(n+2)(2n+1)$.

2. 计算图中变压器的 L 形硅钢片的面积.

3. 一块边长分别为 a cm、b cm 的长方形地砖，如果长、宽各裁去 2 cm，剩余部分的面积是多少？



（第 2 题）

习题 9.3

1. 计算：

(1) $(x-3)(2x+5)$；　　(2) $(2a+1)(-a-2)$；

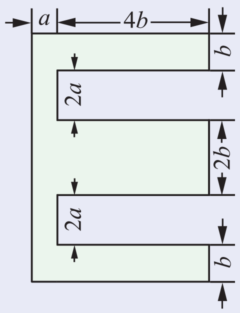
(3) $(-2a+1)^2$；　　(4) $(6a+5)^2$.

2. 计算：

(1) $(a+b)(a-b)-a(a-b)$；

(2) $5x(x^2+4x+4)-(x-3)^2$.

3. 计算图中变压器的 E 形硅钢片的面积.



（第 3 题）

（第 4 题）

4. 太阳能电池板的作用是将太阳的光能转化为电能，电能的大小与它的面积密切相关，在相同光照条件下，面积越大，输出的电能越大. 如果将一块长 90 cm、宽 60 cm 的长方形太阳能电池板的长和宽分别增加 a cm，那么它的面积将增加多少？

5. 计算下列各式：

(1) $(x+1)(x+2)$；　　(2) $(x+1)(x-2)$；

(3) $(x-1)(x-2)$；　　(4) $(x-1)(x+2)$.

6. 计算：

(1) $(a+b)(a-b)$；　　(2) $(a+b)(a+b)$；

(3) $(a+b)(c+d+e)$；　　(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(5) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

9.4 乘法公式

怎样计算图 9–5 的面积？

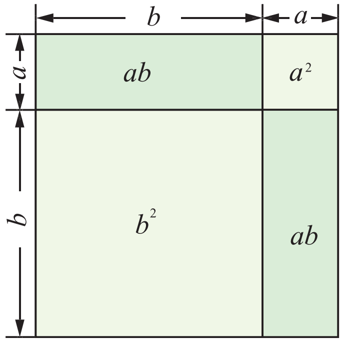


图 9–5

如果把图 9–5 看成一个大正方形，那么它的面积为 $(a+b)^2$.

如果把图 9–5 看成是由 2 个小长方形和 2 个小正方形组成的，那么它的面积为 $a^2+2ab+b^2$.

由此得到

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

一般地，对于任意的 a、b，由多项式乘法法则可以得到

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2,$$

即
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

这个公式称为**完全平方公式**(complete square formula).

例 1 计算：$(a-b)^2$.

解：$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2\cdot a\cdot(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

由例 1，得

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

这个公式也称为**完全平方公式**.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

你能说出这两个公式的特点吗？

例 2 用完全平方公式计算：

（1）$(5+3p)^2$；（2）$(2x-7y)^2$；（3）$(-2a-5)^2$.

解：（1）$(5+3p)^2$

$=5^2+2\cdot5\cdot3p+(3p)^2$

$=25+30p+9p^2$；

（2）$(2x-7y)^2$

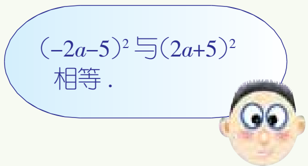
$=(2x)^2-2\cdot2x\cdot7y+(7y)^2$

$=4x^2-28xy+49y^2$；

（3）$(-2a-5)^2$

$=(-2a)^2+2\cdot(-2a)\cdot(-5)+(-5)^2$

$=4a^2+20a+25$.



试一试

计算$(a+b+c)^2$.

练一练

1. 用完全平方公式计算：

（1）$(1+x)^2$；（2）$(y-4)^2$；

（3）$(-3x+2)^2$；（4）$\left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}y\right)^2$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正.

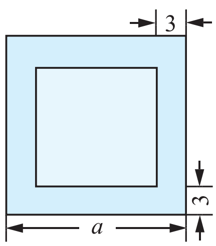
（1）$(x+y)^2=x^2+y^2$；（2）$(-m+n)^2=-m^2+n^2$；

（3）$(x-y)^2=x^2-y^2$.

3. 利用完全平方公式计算：

（1）$2\,001^2$；（2）99^2.

4. 如图，一个正方形的边长为 a cm. 若边长减少 6 cm，则这个正方形的面积减少了多少？



（第 4 题）

想一想

边长为 b 的小正方形纸片放置在边长为 a 的大正方形纸片上（如图 9–6），你能通过计算未盖住部分的面积得到下面的公式吗？

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

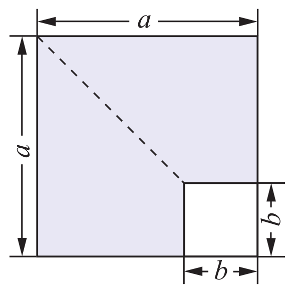


图 9–6

一般地，对于任意的 a、b，由多项式乘法法则可以得到

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

即
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

这个公式称为**平方差公式**(difference of square formula).

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

你能说出这个公式的特点吗？

例 3 用平方差公式计算：

（1）$(5x+y)(5x-y)$；　　（2）$(m+2n)(2n-m)$.

分析：只要把(1)中的 $5x$ 看作平方差公式中的 a，把 y 看作 b；把(2)中的 $2n$ 看作平方差公式中的 a，m 看作 b，就都可以用平方差公式进行计算.

解：（1）$(5x+y)(5x-y)=(5x)^2-y^2=25x^2-y^2$；

（2）$(m+2n)(2n-m)=(2n+m)(2n-m)=(2n)^2-m^2=4n^2-m^2$.

例 4 计算：$(-x+3y)(-x-3y)$.

解：$(-x+3y)(-x-3y)=(-x)^2-(3y)^2=x^2-9y^2$.

完全平方公式、平方差公式通常叫做乘法公式，在计算时可以直接使用.

练一练

1. 用平方差公式计算：

(1) $(1+x)(1-x)$；　　(2) $(a+3b)(a-3b)$；

(3) $(3+2a)(3-2a)$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)\left(-\frac{1}{2}x-2y\right)$.

2. 下面的计算是否正确？如有错误，请改正 .

(1) $(x+2)(x-2)=x^2-2$；

(2) $(-3x+2)(3x-2)=9x^2-4$.

3. 用乘法公式计算：

(1) 49×51；

(2) $(a+2)(a-2)-(a-1)(a+5)$.

例 5 计算：

(1) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$；　　(2) $(2x+3)^2(2x-3)^2$.

解： (1) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$

$=(x^2-9)(x^2+9)$

$=x^4-81$；

(2) $(2x+3)^2(2x-3)^2$

$=[(2x+3)(2x-3)]^2$

$=(4x^2-9)^2$

$=16x^4-72x^2+81$.

例 6 计算：$(x+y+4)(x+y-4)$.

分析： 把 $(x+y)$ 看成一个整体，那么 $(x+y)$ 就相当于平方差公式中的 a，4 就相当于平方差公式中的 b .

解： $(x+y+4)(x+y-4)$

$=[(x+y)+4][(x+y)-4]$

$=(x+y)^2-4^2$

$=x^2+2xy+y^2-16$.

想一想

你能计算 $(x+y-3)(x-y+3)$ 吗？

练一练

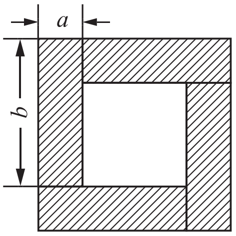
1. 计算：

(1) $a^2+(b-a)(b+a)$；　　(2) $\left(\frac{a}{2}-b\right)^2-\frac{1}{4}(a^2-b^2)$；

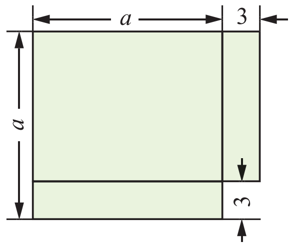
(3) $(a-1)(a+1)(a^2-1)$；　　(4) $(a+3)^2-(a-3)^2$；

(5) $(3a+1)^2(3a-1)^2$；　　(6) $(a-b+c)(a-b-c)$.

2. 用 4 块完全相同的长方形拼成正方形(如图). 用不同的方法，计算图中阴影部分的面积，你能发现什么？



(第 2 题)

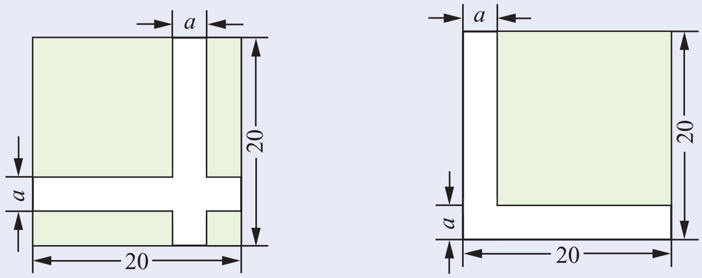


(第 3 题)

3. 如图，如果把边长为 a m 的正方形草坪的一边长增加 3 m，另一边的长减少 3 m，那么新草坪的面积是多少？

习题 9.4

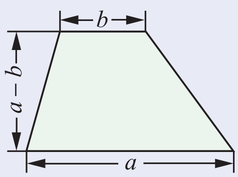
1. 如图，求两个图形中草坪的面积 . 比较它们的大小，你发现了什么？



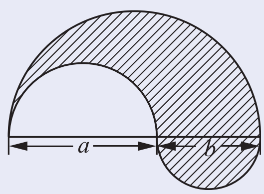
①　　②

(第 1 题)

2. 如图，求梯形的面积 .



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,求由 3 个半圆围成的阴影部分的面积 .

4. 计算：

(1) $(2a+3b)^2$；

(2) $(4x-5y)^2$；

(3) $3\left(\frac{1}{3}a-b\right)^2$；

(4) $(-a-2b)^2$；

(5) $(2m-3n)(2m+3n)$；

(6) $(2a-5b)(5b+2a)$；

(7) $(-2+3x)(-2-3x)$；

(8) $\left(\frac{1}{3}x-y\right)\left(-\frac{1}{3}x-y\right)$.

5. 用乘法公式计算：

(1) 998^2；

(2) $1\,007\times 993$.

6. 填空：

(1) $4a^2+b^2+$ ______ $=(2a+b)^2$；

(2) $4a^2+b^2+$ ______ $=(2a-b)^2$.

7. 计算：

(1) $(x-y)^2-(x+y)^2$；

(2) $(3a-b)^2+(b+3a)^2$；

(3) $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$；

(4) $(2m+3n)^2(2m-3n)^2$；

(5) $4(a+2)^2-7(a+3)(a-3)+3(a-1)^2$；

(6) $(2a-b+3)(2a+b-3)$.

8. 求下列代数式的值：

(1) $(3-4y)(3+4y)+(3+4y)^2$，其中 $y=0.4$；

(2) $(2a+b)^2-(3a-b)^2+5a(a-b)$，其中 $a=\frac{1}{10}$，$b=\frac{1}{5}$.

9.5 单项式乘多项式法则的再认识——因式分解(一)

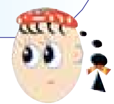
把单项式乘多项式的法则

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

反过来,就得到

$$ab+ac+ad=a(b+c+d).$$

这个式子的左边是多项式 $ab+ac+ad$,右边是 a 与 $(b+c+d)$ 的乘积.



这里 a 是多项式 $ab+ac+ad$ 各项都含有的因式,称为这个多项式各项的**公因式** (common factor).

议一议

下列多项式的各项是否有公因式?如果有,试找出公因式.

(1) a^2b+ab^2;

(2) $3x^2-6x^3$;

(3) $9abc-6a^2b^2+12abc^2$.

当多项式的各项系数都是整数时,公因式的系数应取各项系数的最大公约数;而字母应取各项相同的字母,且各字母的指数取次数最低的.

比如,$9abc-6a^2b^2+12abc^2$ 各项有公因式 $3ab$,$9abc-6a^2b^2+12abc^2$ 可以写成 $3ab$ 与 $(3c-2ab+4c^2)$ 的积的形式,即

$$9abc-6a^2b^2+12abc^2=3ab(3c-2ab+4c^2).$$

像这样,把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做把这个多项式**因式分解** (factoring).

例 把下列各式分解因式:

(1) $6a^3b-9a^2b^2c$;　　(2) $-2m^3+8m^2-12m$.

解: (1) $6a^3b-9a^2b^2c$

$=3a^2b\cdot2a-3a^2b\cdot3bc$

$$= 3a^2b(2a - 3bc);$$

(2) $-2m^3 + 8m^2 - 12m$

$= -(2m \cdot m^2 - 2m \cdot 4m + 2m \cdot 6)$

$= -2m(m^2 - 4m + 6)$.

通常，当多项式的第一项的系数为负时，把“−”号作为公因式的符号写在括号外，使括号内第一项的系数为正.

想一想

如何把多项式 $3a(x+y) - 2b(x+y)$ 分解因式?

如果多项式的各项含有公因式，那么就可以把这个公因式提出来．把多项式化成公因式与另一个多项式的积的形式，这种分解因式的方法叫做**提公因式法**.

练一练

1. 下列各式由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是?

   (1) $ab + ac + d = a(b + c) + d$; (2) $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$;

   (3) $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$.

2. (1) 将多项式 $-5a^2 + 3ab$ 提出公因式 $-a$ 后，另一个因式是__________;

   (2) 把多项式 $4(a+b) - 2a(a+b)$ 分解因式，应提出公因式__________.

3. 把下列各式分解因式：

   (1) $4x^2 - 12x^3$; (2) $-x^2y + 4xy - 5y$.

4. 计算：$2.37 \times 52.5 + 0.63 \times 52.5 - 4 \times 52.5$.

习题 9.5

1. 把下列各式分解因式：

   (1) $ap - aq + am$; (2) $4x^2 - 8xy + 2x$;

   (3) $12xyz - 9x^2y$; (4) $3y^2 - 5xy - 2y$;

   (5) $6a^2b - 9ab^2 + 15ab$; (6) $-4a^4 - 6a^3 + 2a^2$.

2. 先分解因式，再计算求值：

   $IR_1 + IR_2 + IR_3$，其中 $R_1 = 25.4$，$R_2 = 39.2$，$R_3 = 35.4$，$I = 2.5$.

9.6 乘法公式的再认识——因式分解(二)

议一议

你能将多项式 x^2-25 分解因式吗?

把乘法公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来,就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这个等式有什么特征?

这个等式的左边是两数的平方差，右边是这两个数的和与这两个数的差的积,它就是平方差公式,可以把形式是平方差的多项式分解因式.

做一做

(1) $a^2-16=a^2-(\quad)^2=(a+\quad)(a-\quad)$;

(2) $64-b^2=(\quad)^2-b^2=(\quad+b)(\quad-b)$.

例1 把下列各式分解因式:

(1) $36-25x^2$; (2) $16a^2-9b^2$;

(3) $9(a+b)^2-4(a-b)^2$.

解: (1) $36-25x^2=6^2-(5x)^2=(6+5x)(6-5x)$;

(2) $16a^2-9b^2=(4a)^2-(3b)^2=(4a+3b)(4a-3b)$;

(3) $9(a+b)^2-4(a-b)^2$

$=[3(a+b)]^2-[2(a-b)]^2$

$=[3(a+b)+2(a-b)][3(a+b)-2(a-b)]$

$=(5a+b)(a+5b)$.

例 2 如图 9–7，求圆环形绿地的面积 .

解： $\pi\times35^2-\pi\times15^2$

$=\pi(35^2-15^2)$

$=\pi(35+15)(35-15)$

$=1\,000\pi\ (\mathrm{m}^2)$.

答： 圆环形绿地的面积是 $1\,000\pi\ \mathrm{m}^2$.

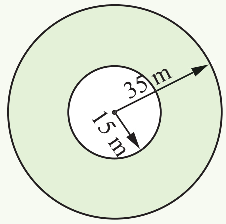


图 9–7

练一练

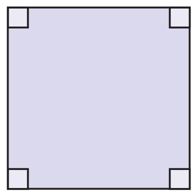
1. 把下列各式分解因式：

（1）$36-x^2$；（2）$a^2-\frac{1}{9}b^2$；

（3）x^2-16y^2；（4）$x^2y^2-z^2$；

（5）$(x+2)^2-9$；（6）$(x+a)^2-(y-b)^2$.

2. 如图，在边长为 16.4 cm 的正方形纸片的 4 角各剪去一边长为 1.8 cm 的正方形，求余下纸片的面积 .



（第 2 题）

议一议

你能将多项式 $a^2+8a+16$ 分解因式吗？

把乘法公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

反过来，就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这两个等式有什么特征？

这两个等式是完全平方公式，它们由左到右的变形是多项式的因式分解．

做一做

（1）$a^2+6a+9=a^2+2\cdot(\qquad)\cdot(\qquad)+(\qquad)^2=(\qquad)^2$；

（2）$a^2-6a+9=a^2-2\cdot(\qquad)\cdot(\qquad)+(\qquad)^2=(\qquad)^2$．

例 3　把下列各式分解因式：

（1）$x^2+10x+25$；

（2）$4a^2-36ab+81b^2$．

解：（1）$x^2+10x+25$

$=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2$

$=(x+5)^2$；

（2）$4a^2-36ab+81b^2$

$=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 9b+(9b)^2$

$=(2a-9b)^2$．

例 4　把下列各式分解因式：

（1）$25a^4+10a^2+1$；

（2）$(m+n)^2-4(m+n)+4$．

解：（1）$25a^4+10a^2+1$

$=(5a^2)^2+2\cdot 5a^2\cdot 1+1^2$

$=(5a^2+1)^2$；

（2）$(m+n)^2-4(m+n)+4$

$=(m+n)^2-2\cdot(m+n)\cdot 2+2^2$

$=[(m+n)-2]^2$

$=(m+n-2)^2$．

运用平方差公式、完全平方公式，把一个多项式分解因式的方法叫做**运用公式法**．

练一练

1. 下列多项式能否分解因式？如果能，请你将它们分解因式：

(1) a^2-4a+4；　　(2) $9a^2-3a+1$；

(3) $4a^2+4a-1$；　　(4) a^2+ab+b^2.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $a^2-12ab+36b^2$；　　(2) $25x^2+10xy+y^2$；

(3) $16a^4+24a^2b^2+9b^4$；　　(4) $(x+y)^2-10(x+y)+25$.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $18a^2-50$；　　(2) $2x^2y-8xy+8y$；

(3) $a^2(x-y)-b^2(x-y)$.

解： (1) $18a^2-50$

$=2(9a^2-25)$

$=2(3a+5)(3a-5)$；

(2) $2x^2y-8xy+8y$

$=2y(x^2-4x+4)$

$=2y(x-2)^2$；

(3) $a^2(x-y)-b^2(x-y)$

$=(x-y)(a^2-b^2)$

$=(x-y)(a+b)(a-b)$.

例 6 把下列各式分解因式：

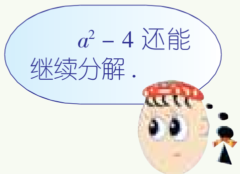
(1) a^4-16；　　(2) $81x^4-72x^2y^2+16y^4$.

解： (1) a^4-16

$=(a^2)^2-4^2$

$=(a^2+4)(a^2-4)$

$=(a^2+4)(a+2)(a-2)$；



(2) $81x^4-72x^2y^2+16y^4$

$=(9x^2)^2-2\cdot 9x^2\cdot 4y^2+(4y^2)^2$

$=(9x^2-4y^2)^2$

$=[(3x+2y)(3x-2y)]^2$

$=(3x+2y)^2(3x-2y)^2$.

通常，把一个多项式分解因式，应先提公因式，再应用公式．进行多项式因式分解时，必须把每一个因式都分解到不能再分解为止．

练一练

1. 把下列各式分解因式：

(1) $3ax^2-3ay^4$；　(2) $-2xy-x^2-y^2$；

(3) $3ax^2+6axy+3ay^2$．

2. 把下列各式分解因式：

(1) x^4-81；　(2) $(x^2-2y)^2-(1-2y)^2$；

(3) x^4-2x^2+1；　(4) $x^4-8x^2y^2+16y^4$．

习题 9.6

把下列各式分解因式：

1. (1) $1-16a^2$；　(2) m^2-9n^2；

(3) $0.25x^2-81y^2$；　(4) $9a^2x^2-b^2y^2$．

2. (1) $(x+5)^2-4$；　(2) $(a+b)^2-a^2$；

(3) $49(a-b)^2-16(a+b)^2$；　(4) $(a^2+b^2)^2-a^2b^2$．

3. (1) $a^2b^2-2ab+1$；　(2) $9-12a+4a^2$；

(3) $x^2+x+\frac{1}{4}$；　(4) $\frac{1}{4}x^2+xy+y^2$．

4. (1) $(a+b)^2+6(a+b)+9$；　(2) $16-24(x-y)+9(x-y)^2$；

(3) $a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$；　(4) $4x^2-4x(y-1)+(y-1)^2$．

5. (1) $-a+2a^2-a^3$；　(2) $3ax^2-3ay^2$；

(3) $16a^2b-16a^3-4ab^2$．

6. (1) a^4-1；　(2) x^4-18x^2+81；

(3) $x^4y^4-8x^2y^2+16$．

阅读

互逆变形

多项式乘法与多项式因式分解是两种互逆的变形，比如，把单项式乘多项式法则 $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ 反过来得到 $ab+ac+ad=a(b+c+d)$，这就是多项式因式分解的提公因式法；把乘法公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来得到 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，这就是多项式

因式分解的运用公式法．将多项式乘多项式法则反过来又将如何呢？

你能将多项式 $ac+ad+bc+bd$ 分解因式吗？

既没有公因式，又不能运用公式法．

前两项有公因式 a，后两项有公因式 b，$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)$．

$a(c+d)+b(c+d)$还不是几个整式的积的形式．

$a(c+d)$与 $b(c+d)$还有公因式$(c+d)$，可提出公因式$(c+d)$，得到 $ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$．

事实上，$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 反过来就得到 $ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$．这样多项式 $ac+ad+bc+bd$ 就分解为两个因式$(a+b)$与$(c+d)$的乘积．

类似地，可以把 $ac+bc+3a+3b$ 分解因式：

$$\begin{aligned}&ac+bc+3a+3b\\&=(ac+bc)+(3a+3b)\\&=c(a+b)+3(a+b)\\&=(a+b)(c+3).\end{aligned}$$

再如：

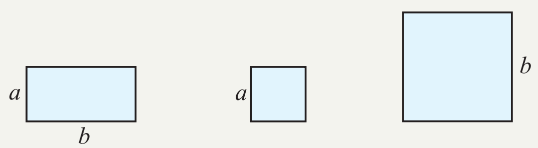
$$\begin{aligned}&a^2-b^2+ac+bc\\&=(a^2-b^2)+(ac+bc)\\&=(a+b)(a-b)+c(a+b)\\&=(a+b)(a-b+c).\end{aligned}$$

此外，我们还学习了$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 反过来，得到 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，这就把多项式 $x^2+(a+b)x+ab$ 分解为两个因式$(x+a)$与$(x+b)$的乘积．

数学活动

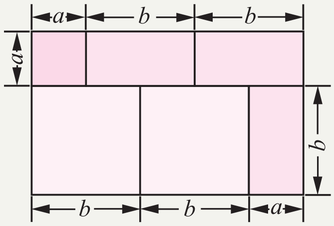
拼图·公式

活动材料 若干块如图所示的长方形和正方形硬纸片．



活动要求　用若干块这样的长方形和正方形硬纸片拼成一个新的长方形，通过不同的方法计算面积，探求相应的等式．

例如　由下图，我们有



$$a^2+3ab+2b^2=(a+2b)(a+b),$$

$$(a+2b)(a+b)=a^2+3ab+2b^2.$$

问题　(1) 任意选取若干块这样的硬纸片，尝试拼成一个长方形，计算它的面积，并写出相应的等式；

(2) 任意写出一个关于 a、b 的二次三项式，如 $a^2+4ab+3b^2$．试用拼一个长方形的方法，把这个二次三项式因式分解．

小结与思考

1. 把几个图形拼成一个新的图形，通过图形面积的计算，常常可以得到一些有用的式子．

2. 乘法公式：

完全平方公式　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$．

平方差公式　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$．

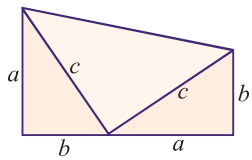
3. 因式分解与整式乘法是互逆的两种变形．例如，把 $(a+b)(a-b)$ 化为 a^2-b^2 是整式乘法；把 a^2-b^2 变形为 $(a+b)(a-b)$ 是多项式因式分解，即

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}a^2-b^2.$$

利用这种互逆关系，可以由整式乘法的法则或公式得到因式分解的一些方法，并能检验因式分解的结果是否正确．

4. 如图，由两个边长分别为 a、b、c 的直角三角形和一个两条直角边都是 c 的直角三角形拼成一个新的图形．

试用不同的方法计算这个图形的面积，你能发现什么？



复习题

复习巩固

1. 计算：

(1) $5a^2b \cdot (-2ab^3)$；　(2) $4x^2y(3xy^2z-7xz)$；

(3) $(2x+3y)(4x+7y)$；　(4) $(a+9)(a+1)$；

(5) $(5-2x)(2x+5)$；　(6) $(-3a+2b)(-3a-2b)$；

(7) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y\right)^2$；　(8) $\left(0.5a+\frac{1}{3}b\right)^2$；

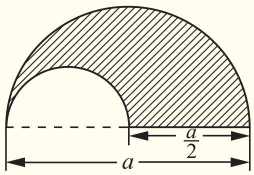
(9) $(-2a^2-7b)^2$；　(10) $\left(-8b+\frac{1}{4}\right)^2$.

2. 计算：

(1) $(x^2y)^4xy^{-3}$；　(2) $4^{-2}x^5(2^3x^{-2})^2$；

(3) $(5^3\times15^{-2})\div3^{-2}$.

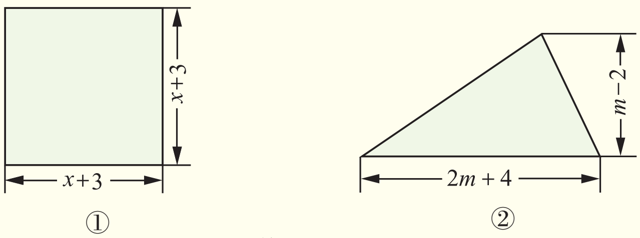
3. 一个长方体的长是 5×10^3 cm、宽是 1.2×10^2 cm、高是 0.8×10^2 cm．求这个长方体的体积．



（第 4 题）

4. 求图中阴影部分的面积．

5. 求下列图形的面积：



（第 5 题）

6. 先化简，再求值：

(1) $a(b-c)-b(c-a)+c(a-b)$，其中 $a=1$、$b=2$、$c=-1$；

(2) $(x-1)(x-2)-3x(x+3)+2(x+2)(x-1)$，其中 $x=\frac{1}{3}$.

7. 利用乘法公式计算：

$500^2-499\times501$.

8. 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-64$；　　(2) $9x^2-6x+1$；

(3) $3x(a-b)-6y(b-a)$；　　(4) $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$；

(5) $4x^3y^2-6x^2y-2xy$；　　(6) $4ab^2-4a^2b-b^3$.

灵活运用

9. 已知$(a+b)^2=7$，$(a-b)^2=3$.

求：(1) ab 的值；　(2) a^2+b^2 的值.

10. 观察下列式子：

$2\times4+1=9$，　①

$4\times6+1=25$，　②

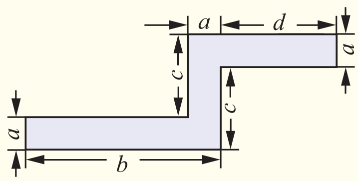
$6\times8+1=49$，　③

⋮

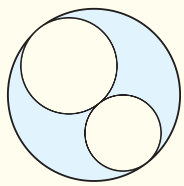
(1) 你发现了什么规律？写出第n个等式.

(2) 你写出的等式成立吗？为什么？

11. 计算下面图形的面积.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，从一块直径为 $a+b$ 的圆形钢板上，截去直径分别为 a 和 b 的两个圆.求剩余钢板的面积.

13. 已知两个正方形的边长的和是 20 cm，它们面积的差是 40 cm^2.求这两个正方形的边长.

14. 一个长方体的高是 8 cm，它的底面是边长为 3 cm 的正方形.如果底面正方形边长增加 a cm，那么它的体积增加多少？

探索研究

15. 用两根同样长的铁丝分别围成一个长方形和一个正方形.

(1) 如果长方形的长为 a m、宽为 b m，用 a、b 表示正方形的边长；

(2) 如果长方形的长比宽多 x m，求正方形与长方形的面积之差.

16. $1\times2+2\times3=2\times2^2$，$2\times3+3\times4=2\times3^2$，$3\times4+4\times5=2\times4^2$……你能发现什么规律吗？

17. (1) 计算下列各组算式,并观察它们的共同特点：

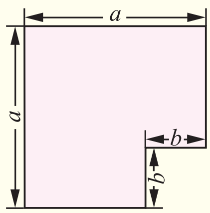
$$\begin{cases}7\times9=\\8\times8=\end{cases}\qquad\begin{cases}11\times13=\\12\times12=\end{cases}\qquad\begin{cases}79\times81=\\80\times80=\end{cases}$$

(2) 从以上的计算过程中，你发现了什么？请用字母表示这一规律，并说明它的正确性.

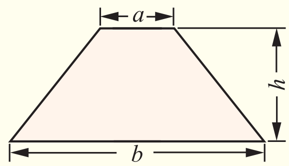
18. 如图，

(1) 请用计算图形面积的方法推出完全平方公式；

(2) 将这个图形剪开并拼成一个长方形或一个梯形，推出平方差公式.



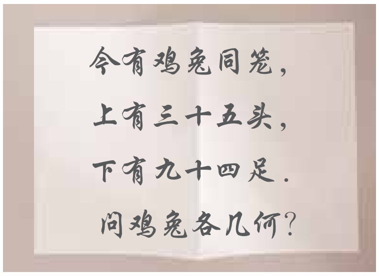
(第 18 题)



(第 19 题)

19. 如图,试把梯形分割成三角形,再通过面积计算推出梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$.

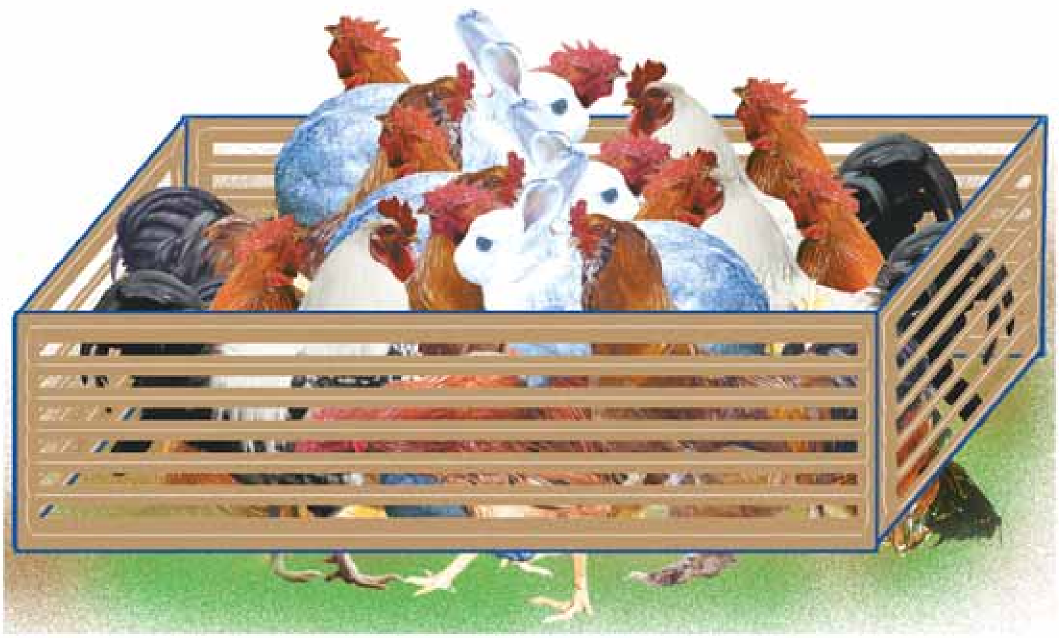
第十章 二元一次方程组



从一元到二元，我们建立了新的数学模型．

从二元到一元，我们用转化思想解决问题．

$$\begin{cases} x + y = 35, \\ 2x + 4y = 94. \end{cases}$$



学校举行环保知识竞赛，规则如下：

答对 1 题得 4 分，答错 1 题扣 1 分．

(1) 小亮在这次竞赛中共回答了 10 个问题，答对 5 题，答错 5 题，小亮得了多少分？

(2) 小明在这次竞赛中也回答了 10 个问题，共得 25 分，小明答对了几题？答错了几题？

● 本章将学习二元一次方程组的建立、解法和应用．

10.1 二元一次方程

根据篮球比赛规则：赢一场得 2 分，输一场得 1 分．在某次中学生篮球联赛中，一支球队赛了若干场后积 20 分，问该队赢了多少场？输了多少场？

如果设该队赢了 x 场，输了 y 场，那么

$$2x + y = 20 .$$

你能列出输赢的所有可能情况吗？

x						5					
y						10					

某球员在一场篮球比赛中共得 35 分（其中罚球得 10 分）．问：他分别投中了多少个两分球？多少个三分球？

设他投中了 x 个两分球、y 个三分球，那么

$$2x + 3y = 35 - 10,$$

即

$$2x + 3y = 25 .$$

请你设计一张表格，列出这名球员投中的两分球和三分球的各种可能情况．

根据你所列的表格，回答下列问题：

(1) 这名球员最多投中了多少个三分球？

(2) 这名球员最多投中了多少个球？

(3) 如果这名球员投中了 10 个球，那么他投中了几个两分球？几个三分球？

议一议

方程 $2x+y=20$ 和 $2x+3y=25$ 有哪些共同的特点?

像这样,含有两个未知数,并且所含未知数的项的次数都是 1 的方程叫做**二元一次方程**(linear equation with two unknowns).

适合二元一次方程的一对未知数的值叫做这个二元一次方程的一个解. 如 $x=8$、$y=3$ 就是方程 $2x+3y=25$ 的一个解,记作

$$\begin{cases} x=8, \\ y=3. \end{cases}$$

练一练

1. 下面 3 对数值,哪几对是二元一次方程 $2x+y=3$ 的解?哪几对是二元一次方程 $3x+4y=2$ 的解?

$\begin{cases} x=-2, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=2. \end{cases}$

2. 设有 1 角的硬币 x 枚,5 角的硬币 y 枚,硬币的总值为 4 元.

(1) 可以列出方程:____________________;

(2) 如果全是 1 角的硬币,共有多少枚?如果全是 5 角的硬币,共有多少枚?

(3) 用列表格的方式,列出 1 角和 5 角硬币枚数所有的可能情况.

习题 10.1

1. 某公园的门票价格为:成人 8 元/张,儿童 3 元/张. 现有 x 名成人,y 名儿童,买门票共花了 44 元. 列出关于 x、y 的二元一次方程:____________________.
2. 二元一次方程 $x-y=5$ 的解有多少个?写出这个方程的 3 个解.
3. 把下列方程写成用含 x 的代数式表示 y 的形式:

(1) $5x+y=15$;　　　　(2) $3x-4y=12$.

4. 盒子里有若干个大小相同的白球和红球,从中任意摸出 1 个球,摸到红球得 2 分,摸到白球得 3 分. 某人摸到 x 个红球,y 个白球,共得 12 分. 试列出关于 x、y 的方程,并写出这个方程所有的解.

10.2 二元一次方程组

“鸡兔同笼”是我国古代数学名著《孙子算经》中的第 31 题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足．问鸡兔各几何？”

设鸡有 x 只，兔有 y 只，可以得到关于 x、y 的两个方程

$$x+y=35,$$
$$2x+4y=94.$$

鸡和兔的只数必须同时满足这两个方程．

将这两个方程联立在一起，可写成

$$\begin{cases}x+y=35,\\2x+4y=94.\end{cases}$$

像这样，含有两个未知数的两个一次方程所组成的方程组叫做**二元一次方程组**(system of linear equations with two unknowns)．

练一练

1. 足球的表面由 32 块黑色五边形和白色六边形皮块围成，黑、白皮块数的比为 3 : 5．设黑色的皮块数为 x，白色的皮块数为 y．列出关于 x、y 的二元一次方程组．

（第 1 题）

2. 苹果的单价为 x 元/kg，梨子的单价为 y 元/kg，买 5 kg 苹果和 4 kg 梨子共花去 20.5 元．如果苹果的单价比梨子的单价贵 0.5 元，列出关于 x、y 的二元一次方程组．

3. 足球对抗赛规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分．甲、乙两队进行了 8 场比赛，甲队保持不败，得 20 分．设甲队胜了 x 场，平了 y 场．列出关于 x、y 的二元一次方程组．

想一想

如果摸到 1 个红球得 x 分、摸到 1 个绿球得 y 分，那么可以得到方程

$$x+3y=11,$$
$$3x+2y=12.$$

这两个方程组成二元一次方程组

$$\begin{cases} x+3y=11, & ① \\ 3x+2y=12. & ② \end{cases}$$

方程①的解是

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} x=8, \\ y=1 \end{cases} \cdots\cdots$$

方程②的解是

$$\begin{cases} x=0, \\ y=6; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=3; \end{cases} \begin{cases} x=4, \\ y=0 \end{cases} \cdots\cdots$$

可以看出 $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 是这两个方程的公共解．

我们把二元一次方程组中两个方程的公共解叫做**二元一次方程组的解**．因此，我们知道，摸到 1 个红球得 2 分，摸到 1 个绿球得 3 分．

做一做

你能求出“鸡兔同笼”问题中二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94 \end{cases}$ 的解吗？

练一练

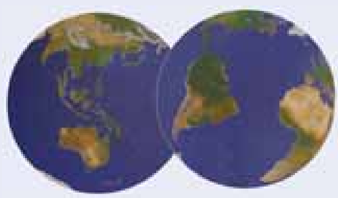
1. 下列 4 对数值，哪几对是二元一次方程 $x+y=3$ 的解？哪几对是二元一次方程 $x-y=-1$ 的解？哪 1 对是二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解？

   $\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases}$　$\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$　$\begin{cases} x=0, \\ y=-1; \end{cases}$　$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

2. 某农户共养了白鸡、黑鸡 100 只，白鸡的只数是黑鸡的 3 倍．设白鸡有 x 只，黑鸡有 y 只，列出关于 x、y 的二元一次方程组．问白鸡和黑鸡各有多少只？

习题 10.2

1. 地球的表面积约为 5.1 亿 km^2，其中海洋面积约为陆地面积的 2.4 倍．地球上的海洋面积和陆地面积各是多少？列出关于海洋面积和陆地面积的二元一次方程组．



（第 1 题）

2. 我国古代《算法统宗》里有这样一首诗：“我问开店李三公，众客都来到店中．一房七客多七客，一房九客一房空．”这首诗的意思是说：如果每一间客房住 7 个人，那么就剩 7 个人安排不下；如果每一间客房住 9 个人，那么就空出一间客房．设客店有客房 x 间，房客 y 人，列出关于 x、y 的二元一次方程组．
3. 解一元一次方程 $7x+7=9x-9$，并说出二元一次方程组 $\begin{cases} y=7x+7, \\ y=9x-9 \end{cases}$ 的解．
4. 用一根长 80 cm 的绳子围成一个长方形，且这个长方形的长比宽多 10 cm．你能知道这个长方形的长和宽吗？

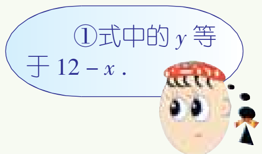
10.3 解二元一次方程组

根据篮球比赛规则：赢一场得 2 分，输一场得 1 分．在某次中学生篮球联赛中，某球队赛了 12 场，赢了 x 场，输了 y 场，得 20 分．我们可以列出方程组

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 2x+y=20. \end{cases}$$

如何解这个二元一次方程组？

例 1 解方程组 $\begin{cases} x+y=12, & ① \\ 2x+y=20. & ② \end{cases}$

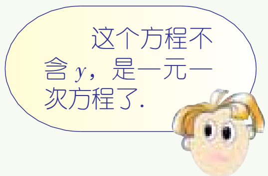


解： 由①，得

$$y=12-x. \qquad ③$$

将③代入②，得

$$2x+12-x=20.$$



解这个一元一次方程，得

$$x=8.$$

将 $x=8$ 代入③，得

$$y=4.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=8, \\ y=4. \end{cases}$

试一试

1. 将例 1 中方程①变形为 $x=12-y$，代入②解方程组．

2. 解方程组 $\begin{cases} x+3y=11, \\ 3x+2y=12. \end{cases}$

将方程组的一个方程中的某个未知数用含有另一个未知数的代数式表示，并代入另一个方程，从而消去一个未知数，把解二元一次方程组转化为解一元一次方程．这种解方程组的方法称为**代入消元法**（elimination by substitution），简称**代入法**．

练一练

1. 用代入法解下列方程组：

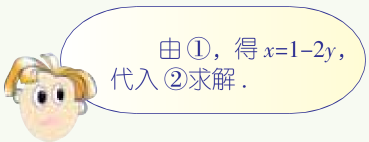
(1) $\begin{cases} y = x, \\ y + 4x = 15; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 7y = 0, \\ x - 9y + 8 = 0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 5. \end{cases}$

2. 一个长方形的长是宽的 3 倍，如果长减少 3 cm，宽增加 4 cm，这个长方形就变成了一个正方形 . 求这个长方形的长和宽 .

3. 一个两位数加上 45 恰好等于把这个两位数的个位数字与十位数字对调后组成的新两位数，这个两位数的十位数字和个位数字的和是 7 . 你能知道这个两位数吗？

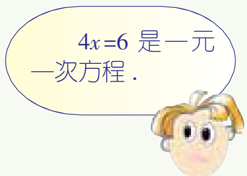
例 2 解方程组 $\begin{cases} x + 2y = 1, & ① \\ 3x - 2y = 5. & ② \end{cases}$



解：①＋②，得

$$4x = 6.$$

$$x = \frac{3}{2}.$$



将 $x = \frac{3}{2}$ 代入①，得

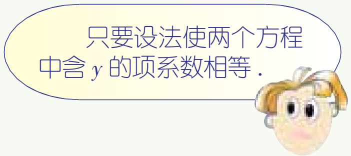
$$\frac{3}{2} + 2y = 1.$$

解这个方程，得

$$y = -\frac{1}{4}.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

例 3 解方程组 $\begin{cases} 5x-2y=4, & ① \\ 2x-3y=-5. & ② \end{cases}$



解： ①×3，得

$$15x-6y=12. \qquad ③$$

②×2，得

$$4x-6y=-10. \qquad ④$$

③－④，得

$$11x=22.$$

解这个方程，得

$$x=2.$$

将 $x=2$ 代入①，得

$$5\times2-2y=4.$$

解这个方程，得

$$y=3.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

想一想

例 3 中，可以先消去 x 解这个方程组吗？

把方程组的两个方程（或先作适当变形）相加或相减，消去其中一个未知数，把解二元一次方程组转化为解一元一次方程 . 这种解方程组的方法叫做**加减消元法**（elimination by addition or subtraction），简称**加减法** .

练一练

1. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 2x+y=32, \\ 2x-y=0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 3x-2y=5, \\ x+3y=9; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 6x + 5z = 25, \\ 3x + 4z = 20; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3s + 4t = 7, \\ 3t - 2s = 1. \end{cases}$

2. 小明买了两份水果，一份是 3 kg 苹果、2 kg 香蕉，共用去 13.2 元；另一份是 2 kg 苹果、5 kg 香蕉，共用去 19.8 元．问：苹果和香蕉的价格各是多少？

习题 10.3

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x + 4y = 5, \\ x = 1 - y; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x + 3y = 7, \\ 2x = 5y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x + 2z = 11, \\ 3x - 5z = 4; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} u + v = 10, \\ 3u - 2v = 5. \end{cases}$

2. 某校甲班的人数比乙班人数的 $\dfrac{2}{3}$ 多 5 人. 如果从甲班调 10 人到乙班，那么乙班人数恰好是甲班人数的 2 倍．求甲、乙两班原来的人数．

3. 小丽和小明两家相距 20 km，小明骑自行车以 15 km/h 的速度到小丽家去，小丽也骑自行车以 12 km/h 的速度到小明家去，途中两人相遇，他们所用时间的和为 1.5 h．两人骑车时间各是多少？

4. 某船在 80 km 的航道上航行，顺流航行需 1.6 h，逆流航行需 2 h．求船在静水中航行的速度和水流的速度．

10.4 用方程组解决问题

问题 1 国庆长假期间，某旅行社接待 1 日游和 3 日游的旅客共 2 200 人，收旅游费 200 万元，其中 1 日游每人收费 200 元，3 日游每人收费 1 500 元．该旅行社接待的 1 日游和 3 日游旅客各有多少人？

分析： 问题中包括两个相等关系：

1 日游旅客人数 + 3 日游旅客人数 = 2 200 人；

所收的1 日游旅游费 + 所收的3 日游旅游费 = 200 万元．

解： 设接待 1 日游旅客 x 人，3 日游旅客 y 人，那么 1 日游共收费 $200x$ 元，3 日游共收费 $1\,500y$ 元．

根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=2\,200, \\ 200x+1\,500y=2\,000\,000. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1\,000, \\ y=1\,200. \end{cases}$$

答： 该旅行社接待 1 日游旅客 1 000 人，3 日游旅客 1 200 人．

问题 2 为保护环境，某校环保小组成员收集废旧电池．第一天收集 5 节 1 号电池，6 节 5 号电池，总质量为 500 g；第二天收集 3 节 1 号电池，4 节 5 号电池，总质量为 310 g．1 节 1 号电池和 1 节 5 号电池的质量分别是多少？

废电池回收筒

分析： 问题中包括两个相等关系：

5 节 1 号电池的质量 + 6 节 5 号电池的质量 = 500 g；

3 节 1 号电池的质量 + 4 节 5 号电池的质量 = 310 g．

解： 设 1 节 1 号电池的质量为 x g，1 节 5 号电池的质量为 y g．

根据题意，得

$$\begin{cases}5x+6y=500,\\3x+4y=310.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=70,\\y=25.\end{cases}$$

答：1 节 1 号电池质量为 70 g，1 节 5 号电池质量为 25 g.

废旧电池的危害

1 节 1 号废旧锌锰电池的质量为 70 g，其中含碳棒 5.2 g、锌皮 7.0 g、锰粉 25 g、铜帽 0.5 g，其他物质 32.3 g . 废旧电池的危害主要集中在它所含的少量重金属上，如铅、汞、镉等 . 由于机械磨损和腐蚀，使得内部的重金属和酸、碱等泄漏出来，进入土壤或水源. 有资料表明，一粒纽扣大的废旧电池，大约会污染 600 000 L 水 . 如这些有毒物质通过各种途径进入人体内，长期积蓄难以排除，会损害神经系统、造血功能和骨骼，甚至可以致癌 .

练一练

1. 某停车场的收费标准如下：中型汽车的停车费为 6 元/辆，小型汽车的停车费为 4 元/辆 . 现在停车场有 50 辆中、小型汽车，这些车共缴纳停车费 230 元，问中、小型汽车各有多少辆?
2. 一家公司加工蔬菜，有粗加工和精加工两种方式. 如果进行粗加工，每天可加工 15 t；如果进行精加工，每天可加工 5 t . 该公司从市场上收购蔬菜 150 t，并用 14 天加工完这批蔬菜 . 问精加工和粗加工蔬菜各多少(单位:t)?

问题 3　某厂生产甲、乙两种型号的产品，生产一个甲种产品需时间 8 s、铜 8 g；生产一个乙种产品需时间 6 s、铜 16 g . 如果生产甲、乙两种产品共用时 1 h，共用铜 6.4 kg，那么甲、乙两种产品各生产多少个?

分析：

	甲种产品 x 个	乙种产品 y 个	总　计
用时/s			
用铜/g			

解：设生产甲种产品 x 个，乙种产品 y 个．

根据题意，得

$$\begin{cases} 8x+6y=3\,600, \\ 8x+16y=6\,400. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=240, \\ y=280. \end{cases}$$

答：生产甲种产品 240 个，乙种产品 280 个．

问题 4 为了加强公民的节水意识，合理利用用水资源，某市采用价格调控手段达到节约用水的目的．规定：每户居民每月用水不超过 6 m^3 时，按基本价格收费；超过 6 m^3 时，超过的部分要加价收费．该市某户居民今年 4、5 月份的用水量和水费如下表所示，试求用水收费的两种价格．

月份	用水量/m^3	水费/元
4	8	21
5	9	27

解：设基本价格为 x 元/m^3，超过 6 m^3 的部分按 y 元/m^3 收费．

根据题意，得

$$\begin{cases} 6x+2y=21, \\ 6x+3y=27. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=1.5, \\ y=6. \end{cases}$$

答：基本价格是 1.5 元/m^3，超过 6 m^3 部分的价格是 6 元/m^3．

做一做

1. 在上面的问题中，如果某户居民 1 月份用水 4 m^3，那么需交水费______元；如果该户居民 6 月份用水 11 m^3，那么需交水费______元．

2. 在上面的问题中，如果某户居民某月交水费 45 元，那么用水量应为______ m^3．

练一练

1. 运输两批救灾物资，第一批 360 t，用 6 节火车车皮和 15 辆汽车正好装完；第二批 440 t，用 8 节火车车皮和 10 辆汽车正好装完．每节火车车皮和每辆汽车平均各能装多少物资(单位：t)？
2. 邮购每册 1.8 元的某种杂志，邮寄费和优惠率如下表．

邮购册数	1~99	100 以上（含 100）
邮寄费用	书价的 10%	免费邮寄
书价优惠	不优惠	优惠 10%

两次邮购这种杂志共 200 册，总计金额 342 元．两次各邮购杂志多少册？

问题 5　制作甲、乙两种无盖的长方体纸盒（如图 10–1），需用正方形和长方形两种硬纸片，且长方形的宽与正方形的边长相等．150 张正方形硬纸片和 300 张长方形硬纸片可供制作甲、乙两种纸盒各多少个？

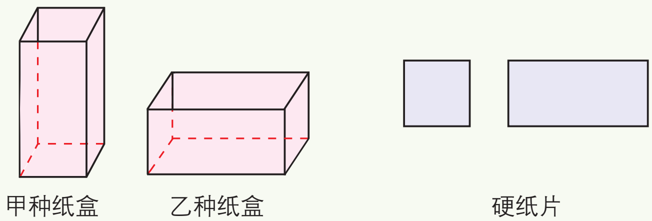


图 10–1

分析： 甲种纸盒用正方形纸片 1 张，长方形纸片 4 张；乙种纸盒用正方形纸片 2 张，长方形纸片 3 张．

解： 设可供制作甲种纸盒 x 个，乙种纸盒 y 个．

根据题意，得

$$\begin{cases} x+2y=150, \\ 4x+3y=300. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=30, \\ y=60. \end{cases}$$

答： 可供制作甲种纸盒 30 个，乙种纸盒 60 个．

问题 6　某铁路桥长 1 000 m，现有一列火车从桥上通过，测得该火车从开始上桥到完全过桥共用了 1 min，整列火车完全在桥

上的时间共 40 s. 求火车的速度和长度 .

分析：如果设火车的速度为 x m/s，火车的长度为 y m，用线段表示大桥和火车的长度，根据题意可画出图 10–2：

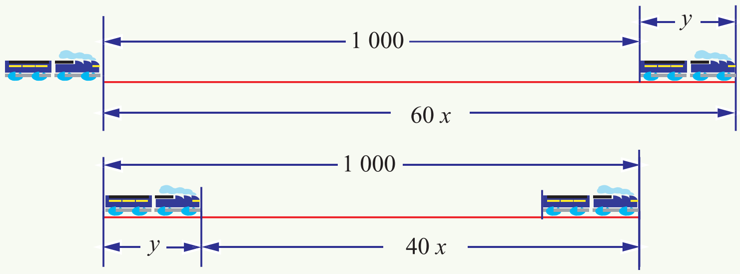


图 10–2

由图 10–2 可知：火车 1 min 行驶的路程等于桥长与火车长的和，火车 40 s 行驶的路程等于桥长与火车长的差 .

解：设火车的速度为 x m/s，火车的长度为 y m .

根据题意，得

$$\begin{cases} 60x = 1\,000 + y, \\ 40x = 1\,000 - y. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x = 20, \\ y = 200. \end{cases}$$

答：火车的速度为 20 m/s，火车的长度为 200 m .

练一练

1. 已知梯形的高是 4 cm，面积是 18 cm^2，梯形的上底比下底的 $\frac{1}{3}$ 多 1 cm . 求梯形上、下底的长度 .
2. 为缓解甲、乙两地旱情，某水库计划向甲、乙两地送水. 第一次往甲地送水 3 天，往乙地送水 2 天，共送水 84 万 m^3；第二次往甲地送水 5 天，往乙地送水 2 天，共送水 120 万 m^3 . 问往甲、乙两地平均每天各送水多少？

习题 10.4

1. 小明和小亮沿 400 m 的环形跑道跑步，他们从某处同时出发，如果同向而行，那么经过 200 s 小明追上小亮；如果背向而行，那么经过 40 s 两人相遇. 求两人的跑步速度 .

2.《希腊文选》中有这样一题："驴和骡驮着货物并排走在路上，驴子不停地埋怨驮的货物太重，压得受不了．骡子对它说：'你发什么牢骚啊！我驮的比你驮的更重．倘若你的货给我一口袋，我驮的货比你驮的货重 1 倍；而我若给你一口袋，咱俩才刚好一样多．' 驴和骡各驮几口袋货物?"

3. 一玻璃厂熔炼玻璃液，其原料由石英砂和长石粉混合而成，要求原料含二氧化硅 70%．经过化验，石英砂中含二氧化硅 95%，长石粉中含二氧化硅 63%．那么，在 3.2 t 原料中，石英砂和长石粉应各占多少?

4. 现有甲、乙两种金属的合金 10 kg，如果加入甲种金属若干千克，那么这块合金中乙种金属占 2 份，甲种金属占 3 份；如果加入的甲种金属增加 1 倍，那么合金中乙种金属占 3 份，甲种金属占 7 份．问第一次加入的甲种金属有多少？原来这块合金中含甲种金属的百分比是多少?

5. 某校组织学生乘汽车去自然保护区野营，先以 60 km/h 的速度走平路，后又以 30 km/h 的速度爬坡，共用了 6.5 h；返回时汽车以 40 km/h 的速度下坡，又以 50 km/h 的速度走平路，共用了 6 h．学校距自然保护区有多远?

6. 某次篮球、排球比赛，共有 24 支队、260 名运动员参加，其中篮球队每队 10 名，排球队每队 12 名．求参赛的篮球队、排球队各有多少支?

7. 食堂的存煤计划用若干天，若每天用 130 kg，则缺少 60 kg；若每天用 120 kg，则还剩余 60 kg．食堂里的存煤共有多少？计划用多少天?

阅读

转　化

举办运动会，参赛运动员都有一个号码，这样就把运动员的姓名转化为数据，给比赛带来了许多方便．

用数轴上的点来表示有理数，计算一个数的绝对值就转化为求数轴上的点到原点的距离，这是数与形的转化；根据减法法则，减去一个数可以转化为加上这个数的相反数，从而把有理数的减法运算转化为有理数的加法运算；

类似地，除以一个不为零的数转化为乘这个数的倒数，从而把有理数的除法运算转化为有理数的乘法运算，这是运算之间的转化．像这样，把复杂问题转化为简单问题，把未知转化为已知，是解决问题的一种常用的思考方法．

本章中，用二元一次方程组解决问题时，要把实际问题转化为方程组，这是实际问题与数学问题之间的转化；用代入消元和加减消元的方法，则可以把解二元一次方程组转化为解一元一次方程，这是从二元到一元的转化．

运用“转化”的思想方法，你能解下面的三元一次方程组吗？

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ x+2y-z=6, \\ 3x-y+z=10. \end{cases}$$

事实上，只要设法消去方程组中的某个未知数，三元一次方程组就可以转化为二元一次方程组来求解．

请试一试！

数学活动

算 年 龄

1. 小明与他爸爸的年龄和是 46 岁．3 年后，小明爸爸的年龄是小明的年龄的 3 倍，利用二元一次方程组求小明和他爸爸的年龄．

2. 根据自己和父母（或祖父母）的年龄或收集其他的数据，编一个可以利用二元一次方程组解决的问题，请同学求解．

小结与思考

1. 二元一次方程组是刻画现实世界两个量之间数量关系的工具. 用二元一次方程组解决问题，关键是找出问题中的两个相等关系．

2. 解二元一次方程组的基本思路是：消去一个未知数，将它转化为一元一次方程来求解．

$$\boxed{\text{二元一次方程组}} \xrightarrow[\text{代入法或加减法}]{\text{消　元}} \boxed{\text{一元一次方程}}$$

3. 已知三角形的周长是 18 cm，其中两边的和等于第三边的 2 倍，而这两边的差等于第三边的 $\frac{1}{3}$．求这个三角形各边的长．

复习题

复习巩固

1. 把二元一次方程 $2x+3y-4=0$ 化为 $y=kx+m$ 的形式．写出 k、m 的值．
2. 方程 $5x-3y=4$ 有没有正整数解？如果有，写出其中的 1 个解．
3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x+4y=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 5x+6y=16, \\ 7x-9y=5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 9x-11y+1=0, \\ 4x-5y-3=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 0.8x-0.9y=2, \\ 6x-3y=2.5; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\dfrac{2y+4}{3}, \\ y=\dfrac{3x-4}{3}; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x+y=300, \\ 5\%x+53\%y=25\%\times 300. \end{cases}$

4. 已知关于 x、y 的方程组 $\begin{cases} 3x-ay=16, \\ 2x+by=15 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=7, \\ y=1. \end{cases}$ 求 a、b 的值．
5. 已知 x 与 y 互为相反数，并且 $2x-y=3$．求 x、y 的值．
6. 已知当 $x=5$ 时，方程 $y-2x=z$ 与 $y+4=3zx$ 有相同的解．求 y、z 的值．
7. 已知梯形的面积是 42 cm^2，高是 6 cm，下底比上底的 2 倍多 2 cm. 求梯形上、下底的长度．
8. 现有 100 元和 20 元的人民币共 33 张，总金额 1 620 元．这两种人民币各有多少张？
9. 师徒两人检修一条长 270 m 的自来水管道，师傅每小时比徒弟多检修 10 m，两人从管道两端同时开始检修，3 h 后完成任务．师傅与徒弟每小时各检修多少(单位:m)？
10. A、B 两地相距 36 km，小明从 A 地骑自行车到 B 地，小丽从 B 地骑自行车到 A 地，两人同时出发相向而行，经过 1 h 后两人相遇；再过 0.5 h，小明余下的路程是小丽余下的路程的 2 倍．小明和小丽骑车的速度各是多少？

灵活运用

11. 某农户在一荒坡上种植了杨树和松树，已知种植的杨树棵数比总数的一半多 11 棵，种植的松树棵数比总数的三分之一少 2 棵．两种树各种植了多少棵？

12. 把一堆书分给几名学生，如果每人分到 4 本，那么多 4 本；如果每人分到 5 本，那么最后 1 名学生只分到 3 本．问：一共有多少名学生？多少本书？

13. 某人分别以售价的 8 折和 9 折的价格购买了两件衬衫，共付款 182 元．已知这两件衬衫的售价的和是 210 元，求这两件衬衫的售价．

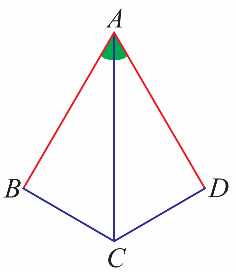
14. 美术小组共有 30 名同学，准备到文具店购买铅笔和橡皮．如果全组每人各买 2 枝铅笔和 1 块橡皮，那么需按零售价购买，共支付 30 元；如果全组每人各买 3 枝铅笔和 2 块橡皮，那么可按批发价购买，共支付 40.5 元. 已知 1 枝铅笔的批发价比零售价低 0.05 元，1 块橡皮的批发价比零售价低 0.10 元. 这家文具店的铅笔和橡皮的批发价各是多少？

探索研究

15. 编一个二元一次方程组，使它的解是$\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

16. 小亮在匀速行驶的汽车里，注意到公路里程碑上的数是两位数；1 h 后看到里程碑上的数与第一次看到的两位数恰好颠倒了数字顺序；再过 1 h，第三次看到里程碑上的数又恰好是第一次看到的两位数的数字之间添加一个 0 的三位数．这 3 块里程碑上的数各是多少？

第十一章 图形的全等

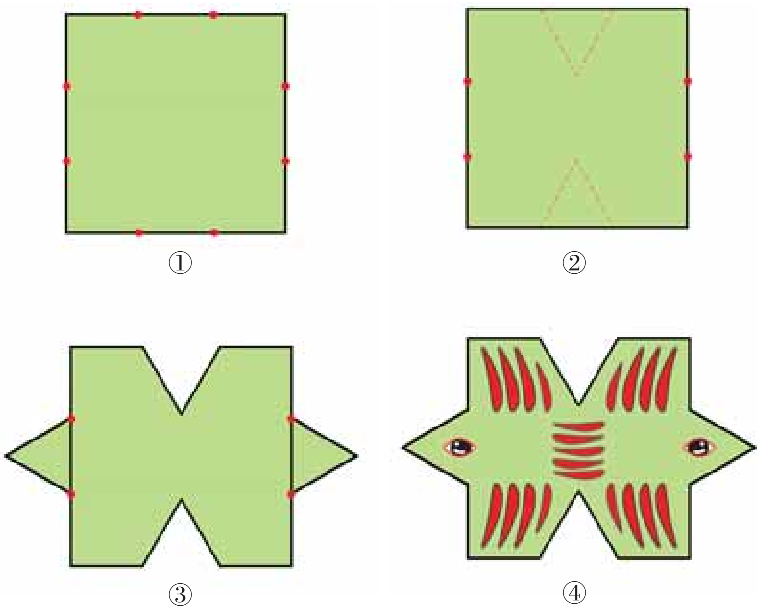


$\triangle ABC \cong \triangle ADC$

窗花、蝴蝶……给人以美感；

探索图形全等，揭示它的奥秘．

用正方形纸按图中所示的步骤制作飞鸟图案，再制作若干个这样的全等图形，用它们拼成一幅由飞鸟组成的图案．



① ② ③ ④

● 本章将认识全等图形以及全等三角形，探索两个三角形全等的条件．

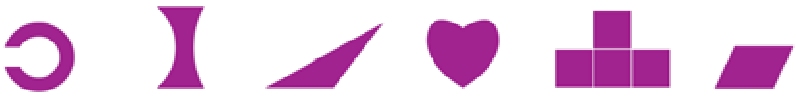
11.1 全等图形

以上图案中的窗花、邮票、蝴蝶等都是能完全重合的．日常生活中，你见过这样的图案吗？试举例．

能完全重合的图形叫做**全等图形**(congruent figures)．两个图形全等，它们的形状和大小都相同．

议一议

1. 观察图 11–1，从中找出全等图形，与同学交流 .



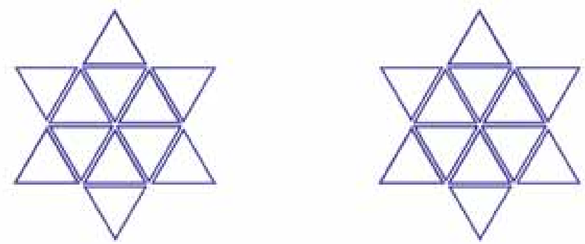
（1）（2）（3）（4）（5）（6）

（7）（8）（9）（10）（11）（12）

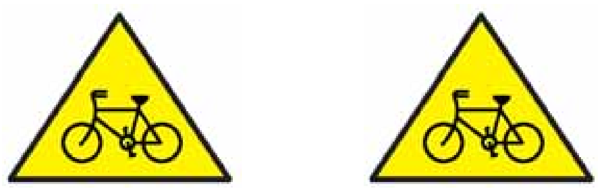
图 11–1

2. 欣赏下列图案，并从中找出全等图形 .

（1）



（2）

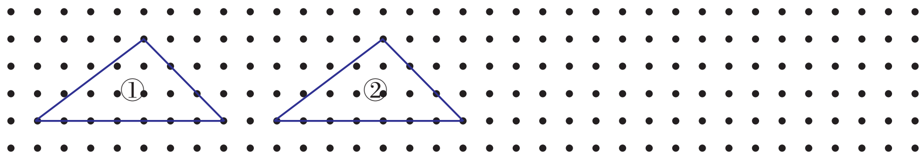


（3）

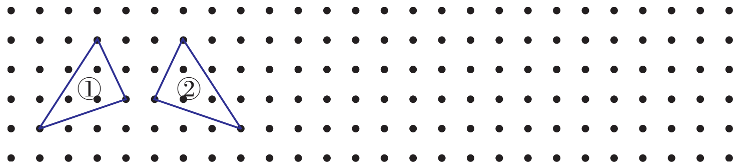
图 11–2

做一做

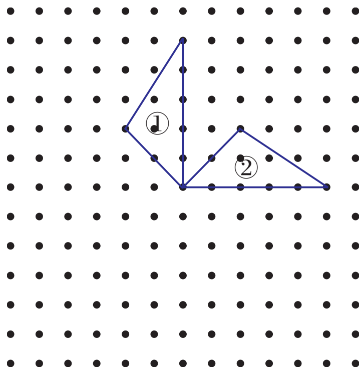
观察图 11-3(1)、(2)、(3)中的全等三角形，其中，第②个三角形各是怎样由第①个三角形改变位置得到的？按照同样的方法，在图 11-3(1)、(2)、(3)中分别画出第③、第④个三角形 .



(1)



(2)

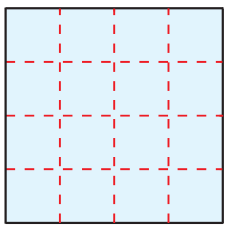


(3)

图 11-3

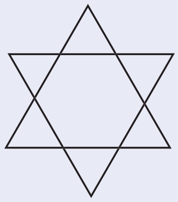
练一练

用不同的方法沿网格线把正方形分割成两个全等的图形 .



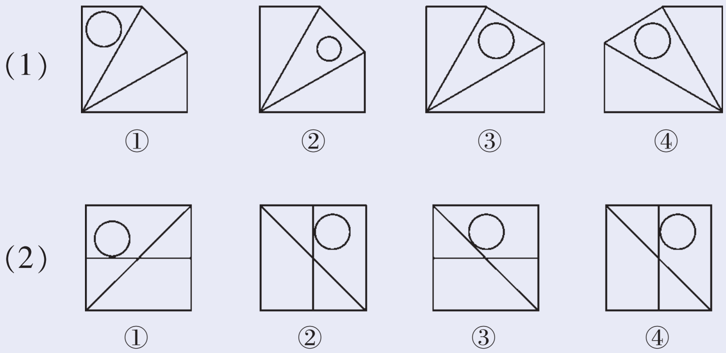
习题 11.1

1. 说出图中的全等图形．



（第 1 题）

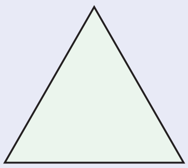
2. 找出下面各组图中的全等图形．



（第 2 题）

3. 用不同的方法把图中的平行四边形分成 4 个全等的图形．

（第 3 题）



（第 4 题）

4. 把图中的等边三角形分成 2 个、3 个、4 个全等图形．

11.2 全等三角形

信封上盖的两个三角形纪念邮戳能够完全重合．

请你剪两个能重合的三角形．

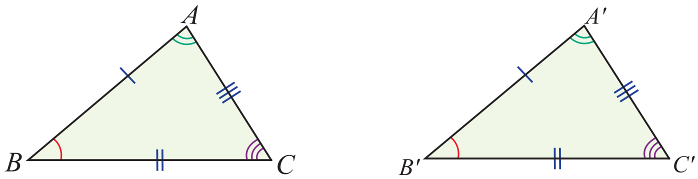


图 11–4

如图 11–4，两个能重合的三角形是**全等三角形**（congruent triangles），记作“$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$”，读作“$\triangle ABC$ 全等于 $\triangle A'B'C'$”．顶点 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 是对应顶点；AB 与 $A'B'$ 是**对应边**（corresponding sides）；$\angle A$ 与 $\angle A'$ 是**对应角**（corresponding angles）．

在表示两个三角形全等时，要把对应顶点的字母写在对应的位置上．

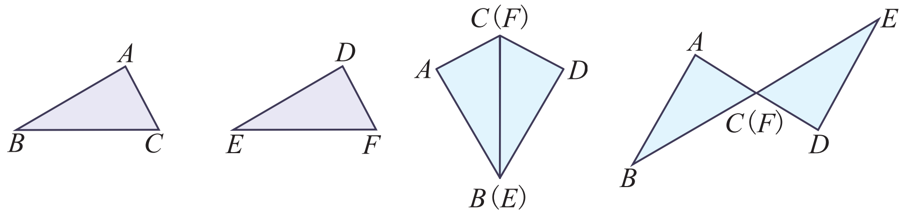
全等三角形的对应边相等，对应角相等．

说一说

若 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，说出这两个三角形的对应边和对应角．

做一做

1. 先把你剪得的两个全等三角形摆放成图 11–5(1)、(2)、(3)的位置.



(1)　　(2)　　(3)

图 11–5

2. 再动手操作并填空:

把图 11–5(1)中的△ABC 沿 BC 所在直线平行移动到△DEF 的位置,两个三角形重合,表示为______ ≌ ______;

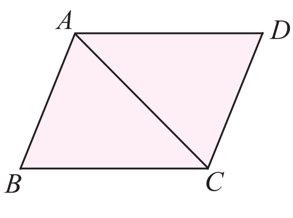
把图 11–5(2)中的△ABC 沿 BC 所在直线翻折 180°到△DBC(即△DEF)的位置,两个三角形重合,表示为______ ≌ ______;

把图 11–5(3)中的△ABC 绕顶点 C 旋转 180°到△DEC(即△DEF)的位置,两个三角形重合,表示为______ ≌ ______.

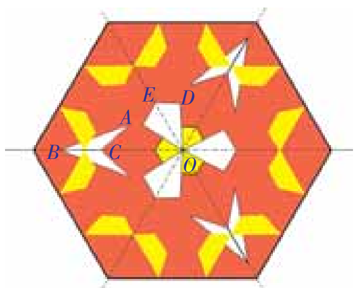
3. 分别说出各对全等三角形的对应角、对应边.

练一练

1. 如图,△ABC ≌△CDA,AB 和 CD、BC 和 DA 是对应边,写出它们的对应角和另外一组对应边,写出相等的边和角.



(第 1 题)

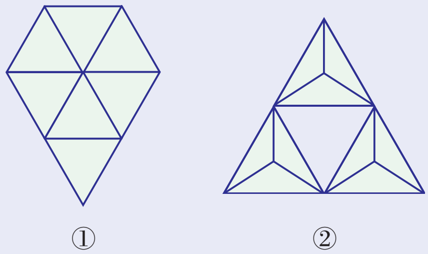


(第 2 题)

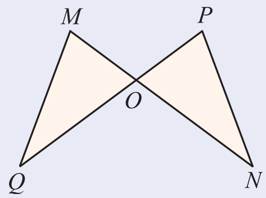
2. 如图,万花筒中的图案精彩纷呈.怎样改变图案中△ABC、△DOE 的位置,才能与其他相应的三角形重合.

习题 11.2

1. 试找出图案中的全等三角形．



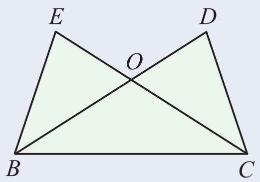
（第 1 题）



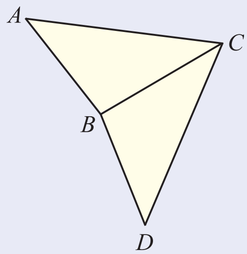
（第 2 题）

2. 如图，$\triangle OMQ \cong \triangle OPN$，写出这两个三角形的对应边和对应角．

3. 如图，$\triangle BCE \cong \triangle CBD$，写出这两个三角形中相等的边和相等的角．



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DBC$，$\angle A = 45°$，$\angle ABC = 98°$．求$\triangle BCD$各内角的度数．

11.3 探索三角形全等的条件

我们知道：如果两个三角形全等，那么它们的对应边相等，对应角相等．反过来，两个三角形需要具备什么条件，即它们有多少组边或角分别相等时就全等呢？

议一议

1. 当两个三角形只有 1 组边或角相等时，它们全等吗？
2. 当两个三角形只有 2 组边或角相等时，它们全等吗？
3. 当两个三角形有 3 组边或角相等时，它们全等吗？

做一做

如图 11–6，用一张长方形纸剪一个直角三角形，怎样才能使全班同学剪下的直角三角形都全等？

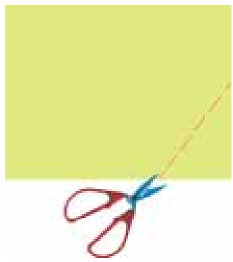


图 11–6

观察图 11–7 中的三角形，先猜一猜，再量一量，哪两个三角形是全等三角形？

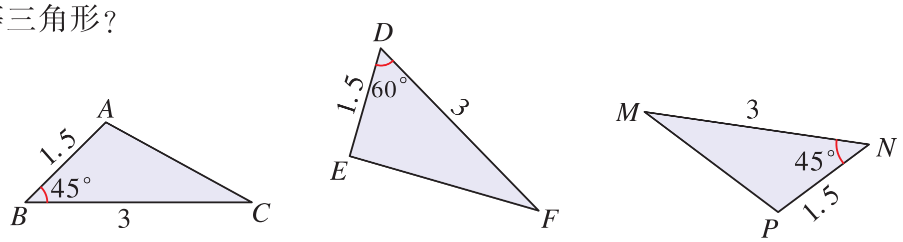


图 11–7

如图 11–8：

（1）画 $\angle MAN = 50°$；

（2）在 AM、AN 上分别截取 $AB = 1.4$ cm，$AC = 2.3$ cm；

（3）连接 BC，剪下所画的 $\triangle ABC$，与同学所画的三角形能够重合吗？

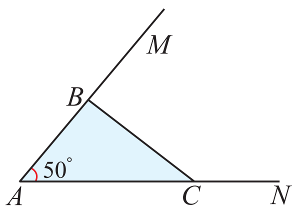


图 11–8

两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等，简写成“边角边”或“SAS”.

例 1　如图 11－9，$AB=AD$，$\angle BAC=\angle DAC$. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 全等吗？为什么？

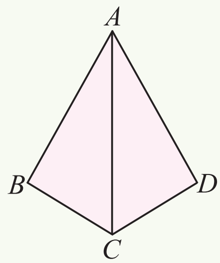


图 11－9

解： $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

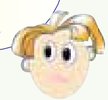
因为 $AB=AD$，$\angle BAC=\angle DAC$，$AC=AC$，

根据“SAS”，可以得到

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

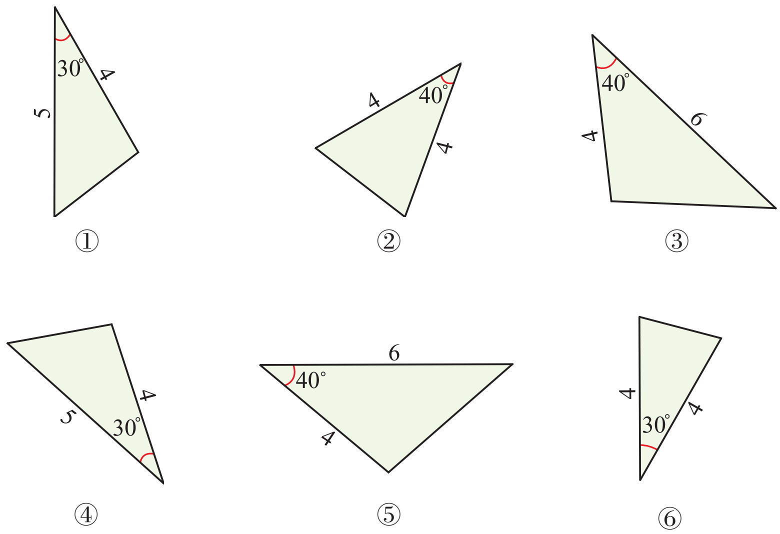
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD, \\ \angle BAC=\angle DAC, \\ AC=AC, \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC.$$



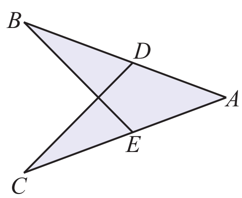
练一练

1. 如图，在下列三角形中，哪两个三角形全等？



（第 1 题）

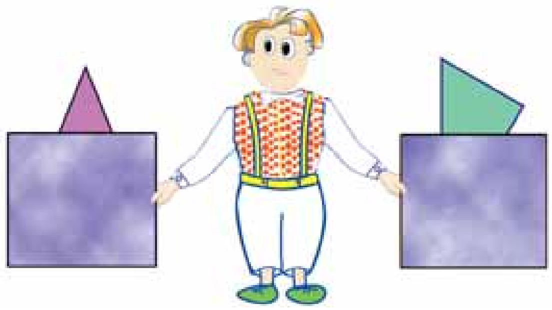
2. 如图，$AB=AC$，$AD=AE$. $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 全等吗？请说明理由.



（第 2 题）

议一议

小明用板挡住了两个三角形的一部分？你能画出这两个三角形吗？如果能，你画的三角形与同学画的三角形全等吗？



观察图 11–10 中的三角形，先猜一猜，再量一量，哪两个三角形是全等三角形？

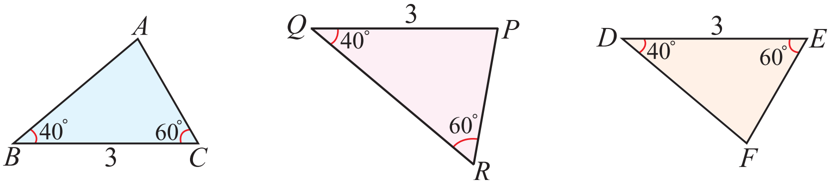


图 11–10

做一做

1. 如图 11–11，画线段 $AB=2.6\text{ cm}$，再画 $\angle BAP=45°$，$\angle ABQ=60°$，AP 与 BQ 相交于点 C.

2. 剪下所画的 $\triangle ABC$，与同学所画的三角形能够重合吗？

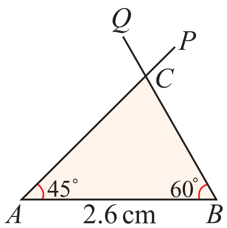


图 11–11

两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等，简写成“角边角”或“ASA”.

想一想

如图 11–12，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MNP$ 中，$\angle A=\angle M$，$\angle B=\angle N$，$BC=NP$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle MNP$ 全等吗？为什么？

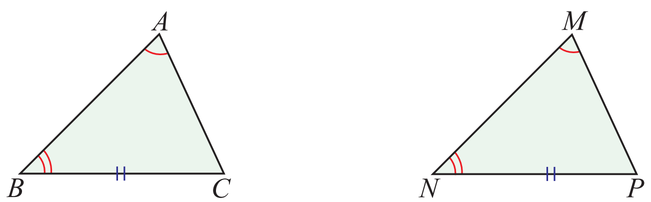


图 11–12

两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等．简写成“角角边”或“AAS”．

例 2 如图 11-13，OP 是 $\angle MON$ 的平分线，C 是 OP 上的一点，$CA \perp OM$，$CB \perp ON$，垂足分别为 A、B. $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 全等吗？为什么？

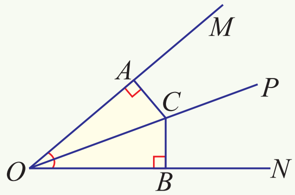


图 11-13

解：$\triangle AOC \cong \triangle BOC$．

因为 $CA \perp OM$，$CB \perp ON$，

所以 $\angle CAO = \angle CBO = 90°$．

又因为 OP 是 $\angle MON$ 的平分线，

所以 $\angle AOC = \angle BOC$．

又因为 $OC = OC$，

根据“AAS”，可以得到

$\triangle AOC \cong \triangle BOC$．

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 中，

$\left.\begin{array}{l}\angle CAO = \angle CBO = 90°,\\ \angle AOC = \angle BOC,\\ OC = OC,\end{array}\right\}$

$\rightarrow \triangle AOC \cong \triangle BOC$．

议一议

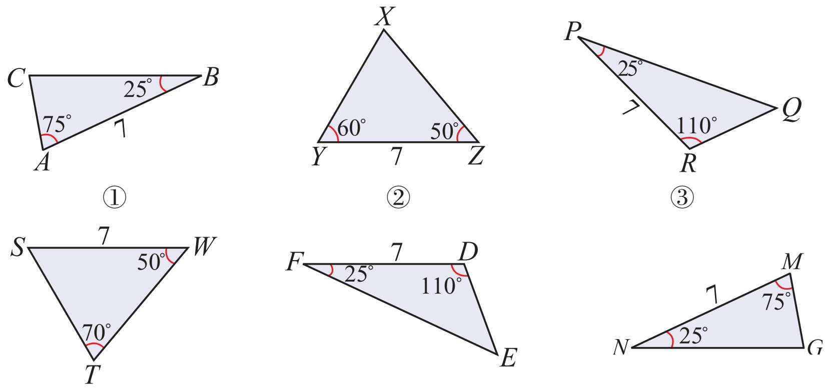
1. 在图 11-13 中，如果改变点 C 在 OP 上的位置，那么 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOC$ 仍然全等吗？

2. 你能发现什么结论？

角平分线上的点到角的两边的距离相等．

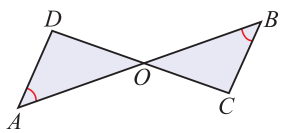
练一练

1. 找出图中的全等三角形，写出表示它们全等的式子，并说明理由．

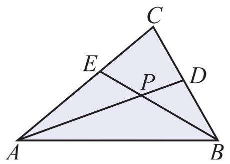


（第 1 题）

2. 如图，AB、CD 相交于点 O，O 是 AB 的中点，$\angle A=\angle B$. $\triangle AOD$ 与 $\triangle BOC$ 全等吗？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\triangle ABC$ 的角平分线 AD、BE 相交于点 P，分别画出点 P 到边 AB、BC、CA 的垂线段 PF、PG、PH，这 3 条线段相等吗？为什么？

1. 用一根长 20 cm 的铁丝，围成一个三角形，怎样才能使你和同学围成的三角形全等？

2. 按下列画法，用圆规和刻度尺画一个三角形：

画　法	图　形
1. 画线段 $AB=4$ cm.	
2. 分别以点 A、B 为圆心，3 cm、2 cm 的长为半径画弧，两弧相交于点 C.	
3. 连接 AC、BC.	

你所画的三角形与其他同学画的三角形全等吗？

三边对应相等的两个三角形全等，简写为“边边边”或“SSS”.

上面的结论还告诉我们，如果一个三角形三边的长度确定，那么这个三角形的形状和大小就完全确定. 如图 11–14，用 3 根木条钉成的三角形框架，它的形状和大小完全确定. 三角形的这种性质叫做三角形的稳定性.

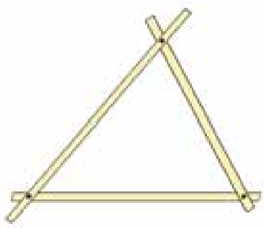
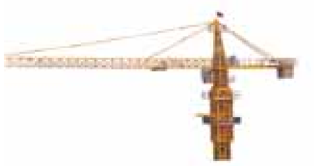


图 11–14

三角形的稳定性在生活和生产中有着广泛的应用．

火箭发射架



工地塔吊

空调架

议一议

1. 你还能举出应用三角形稳定性的一些例子吗？
2. 四边形是否具有稳定性？

如图 11–15，用 4 根木条钉成的四边形框架的形状是可以改变的，四边形不具有稳定性．

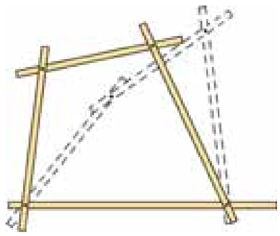
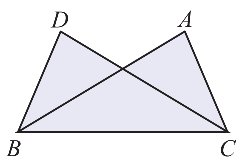


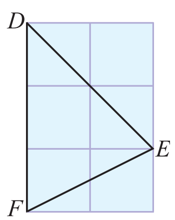
图 11–15

练一练

1. 3 组内角分别相等的两个三角形全等吗？
2. 如图，若 $AB = DC$，$AC = DB$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 全等吗？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，方格纸中 $\triangle DEF$ 的 3 个顶点分别在小正方形的顶点（格点）上，这样的三角形叫格点三角形．请你在图中再画 1 个格点三角形 ABC，且使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$．这样的格点三角形你能画几个？

想一想

工人师傅常常利用角尺平分一个任意角．如图11–16，在$\angle COD$的两边OC、OD上分别任取$OA=OB$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点A、B重合，这时过角尺顶点M的射线OM就是$\angle COD$的平分线．请你说明这样画角平分线的道理．

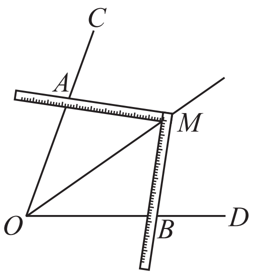
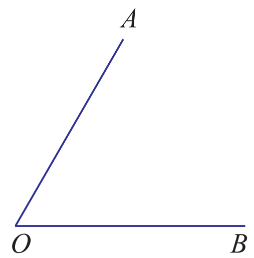


图 11–16

由此，可以得到如下画角平分线的方法．

按下列画法，用直尺和圆规画$\angle AOB$的平分线．

画　法	图　形
1. 以O为圆心，任意长为半径画弧，分别交射线OA、OB于点D、E．	
2. 分别以D、E为圆心，大于$\frac{1}{2}DE$的长为半径画弧，两弧在$\angle AOB$的内部交于点C．	
3. 画射线OC． OC就是$\angle AOB$的平分线．	

例3 如图11–17，点A、C、D、F在同一条直线上，$AB=FE$，$BC=ED$，$AD=FC$．$\angle B$与$\angle E$相等吗？为什么？

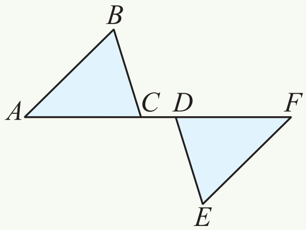


图 11–17

分析： 要说明$\angle B=\angle E$，只要能断定$\triangle ABC\cong\triangle FED$．要说明$\triangle ABC\cong\triangle FED$，除了有条件$AB=FE$，$BC=ED$以外，还应该有条件$AC=FD$，而由$AD=FC$就能得到$AC=FD$．

解： $\angle B=\angle E$．

因为$AD=FC$，$AC=AD-CD$，$FD=FC-CD$，

所以$AC=FD$．

又因为$AB=FE$，$BC=ED$，

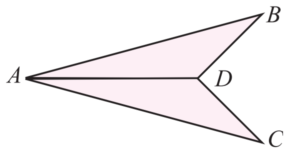
根据“SSS”，可以知道$\triangle ABC\cong\triangle FED$．

所以$\angle B=\angle E$．

练一练

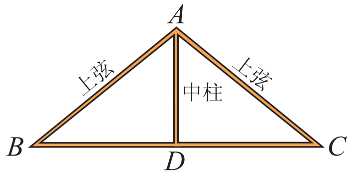
1. 在图中用直尺和圆规画平角∠AOB 的平分线．

（第 1 题）



（第 2 题）

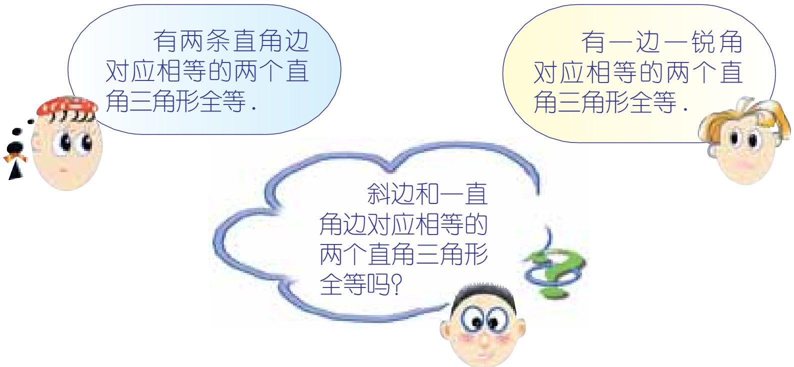
2. 如图，$AB=AC$，$BD=CD$，你能说明∠B＝∠C 的理由吗？
3. 如图，厂房屋顶人字架（等腰三角形）的上弦 $AB=AC$，中柱 AD（D 为底边 BC 的中点）与 BC 垂直吗？为什么？



（第 3 题）

议一议

直角三角形是特殊的三角形，可记作 Rt△．要使两个直角三角形全等，需要有哪些边或角相等呢？



做一做

按下列画法，用圆规和刻度尺画直角三角形．

画　法	图　形
1. 画∠$PCQ=90°$．	
2. 在射线 CP 上取 $CB=3$ cm．	
3. 以 B 为圆心，5 cm 为半径画弧交射线 CQ 于点 A．	
4. 连接 AB．	

你所画的直角三角形与其他同学画的直角三角形全等吗？

斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等．简写为“斜边、直角边”或“HL”．

例 4 如图 11–18，$AC \perp BC$，$AD \perp BD$，垂足分别为 C、D，$AC = BD$．Rt△ABC 与 Rt△BAD 全等吗？为什么？

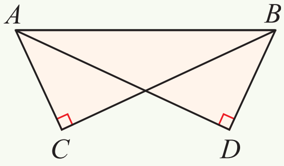


图 11–18

解： Rt△ABC≌Rt△BAD．

因为 $AC \perp BC$，$BD \perp AD$，

所以 $\angle ACB = \angle BDA = 90°$．

又因为 $AC = BD$，

$AB = BA$，

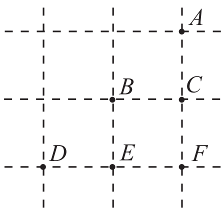
根据 HL，可以知道

Rt△ABC≌Rt△BAD．

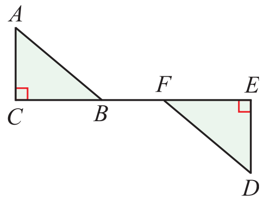
$AC \perp BC \to \angle ACB = 90°$，
$BD \perp AD \to \angle BDA = 90°$，
在 Rt△ABC 和 Rt△BAD 中，
$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \angle BDA = 90°, \\ AC = BD, \\ AB = BA,\end{array}\right\}$
$\to$ Rt△ABC≌Rt△BAD．

练一练

1. 如图，方格纸中有点 A、B、C、D、E、F，以其中的 3 个点为顶点，画出所有的直角三角形，并找出其中全等的直角三角形．

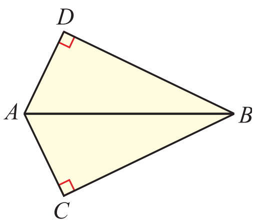


（第 1 题）



（第 2 题）

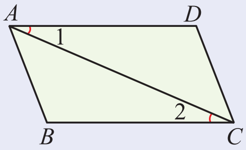
2. 如图，$AB = DF$，$CF = EB$，$AC \perp CE$，$DE \perp CE$，垂足分别为 C、E．△ABC 与△DFE 全等吗？为什么？
3. 如图，$AC = AD$，$\angle C = \angle D = 90°$．$BD$ 和 BC 是否相等？并说明理由．



（第 3 题）

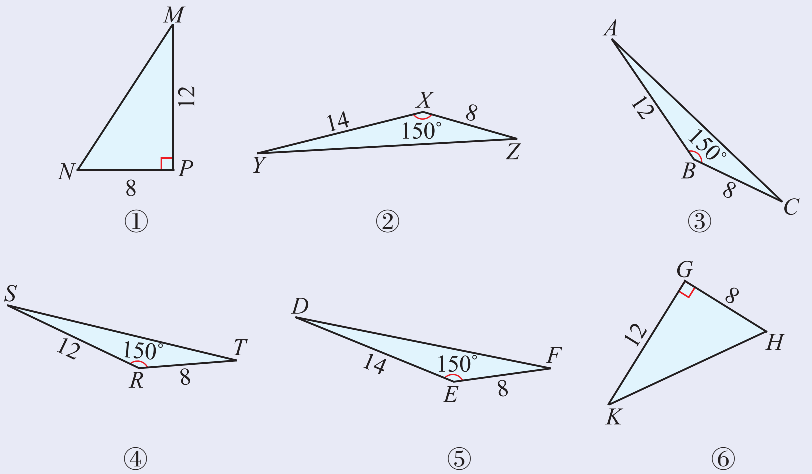
习题 11.3

1. 已知：如图，$AD = CB$，$\angle 1 = \angle 2$．$\triangle ADC$ 与 $\triangle CBA$ 全等吗？为什么？



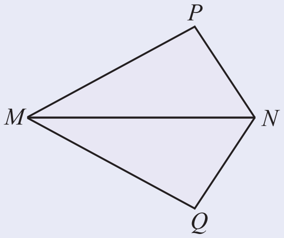
（第 1 题）

2. 在下列图形中找出全等三角形，并写出表示它们全等的式子．

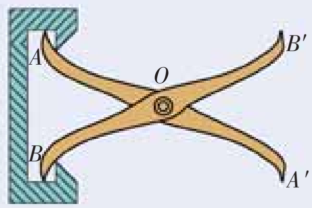


（第 2 题）

3. 如图，$MP=MQ$，还要具备什么条件，就能使$\triangle MPN$与$\triangle MQN$全等？



（第 3 题）



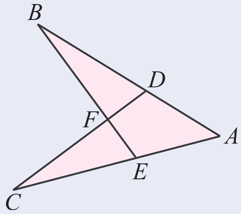
（第 4 题）

4. 如图，把两根钢条 AA'、BB'的中点 O 连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（这种工具叫卡钳），只要量出 $A'B'$的长度，就可以知道工件的内径 AB 的长度是否符合标准．你能说出这样测量的理由吗？

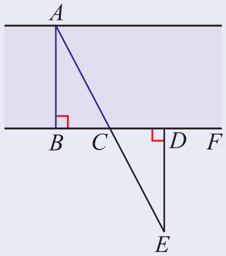
5. 如图，点 D、E 分别在 AB、AC 上，BE、CD 相交于点 F．

(1) 如果 $AB = AC$，$\angle B = \angle C$，试找出一对全等三角形，并说明理由；

(2) 如果 $BD=CE$，$\angle B=\angle C$，试找出一对全等三角形，并说明理由．



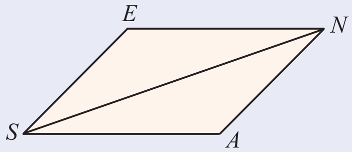
（第 5 题）



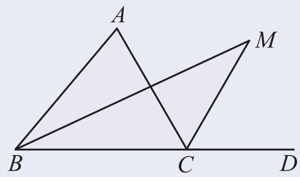
（第 6 题）

6. 如图，要测量河两岸相对的两点 A、B 的距离，可以在 AB 的垂线 BF 上取两点 C、D，使 $CD=BC$，再定出 BF 的垂线 DE，使点 A、C、E 在一条直线上，这时测得的 DE 的长就是 AB 的长，为什么？

7. 如图，$SA/\!/EN$，$SE/\!/AN$．请在图中找出全等三角形，并写出相等的边和角．



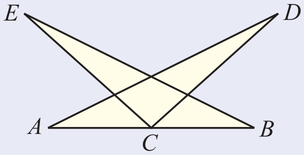
（第 7 题）



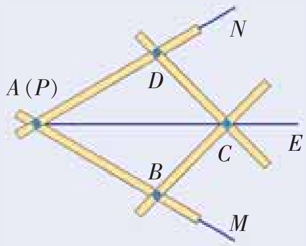
（第 8 题）

8. 如图，$\angle ABC$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 M．试画出点 M 到 $\triangle ABC$ 3 边所在直线的垂线段．这 3 条垂线段的长度相等吗？为什么？

9. 如图，若 C 是 AB 的中点，$AD=BE$，$CD=CE$，则 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$ 全等．为什么？



（第 9 题）

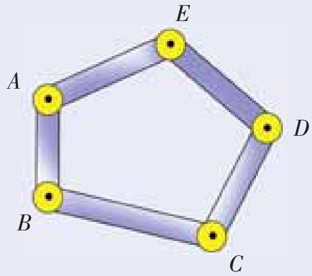


（第 10 题）

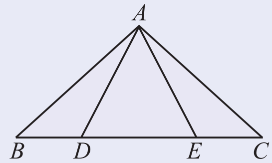
10. 如图，用平分角的仪器（其中 $AB=AD$，$BC=DC$）平分 $\angle MPN$，方法如下：将点 A 落在 $\angle MPN$ 的顶点 P 上，AB 和 AD 分别落在

AM、AN 上，沿 AC 画一条射线 AE，试说明 AE 平分 $\angle MPN$ 的理由．

11. 如图，5 根钢管铰接成五边形钢架 $ABCDE$．要使钢架稳固且不能活动，最少还需添几根钢管？



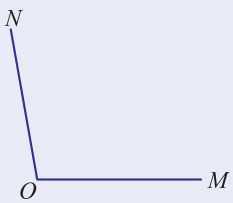
（第 11 题）



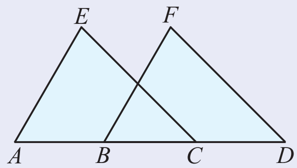
（第 12 题）

12. 如图，$AB=AC$，$AD=AE$，$BD=CE$．$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 全等吗？请说明理由．图中还有全等的三角形吗？把它们找出来．

13. 用直尺和圆规把 $\angle MON$ 四等分．



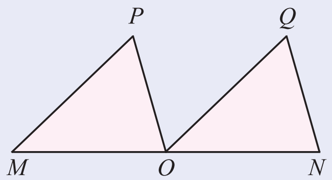
（第 13 题）



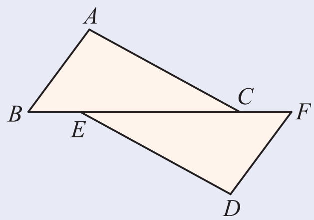
（第 14 题）

14. 如图，点 A、B、C、D 在一条直线上，$AE=BF$，$CE=DF$，$AB=CD$．$\triangle ACE$ 与 $\triangle BDF$ 全等吗？为什么？

15. 如图，$MO=ON$，还要具备什么条件就能使 $\triangle MOP$ 与 $\triangle ONQ$ 全等？把这些条件写出来．



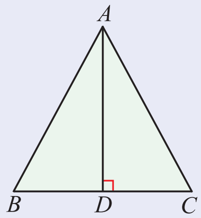
（第 15 题）



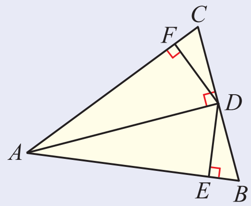
（第 16 题）

16. 如图，点 B、E、C、F 在一条直线上，$AC=DE$，$AB=DF$，$BE=FC$．$\angle A$ 与 $\angle D$ 相等吗？为什么？

17. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$AD\perp BC$，垂足为D．你能发现BD与CD、$\angle BAD$与$\angle CAD$有什么关系吗？并说明理由．



（第17题）



（第18题）

18. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为D、E、F．如果$AB=AC$，你能找出图中的全等三角形吗？并说明理由．

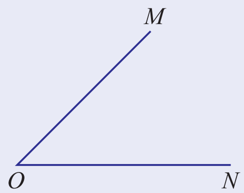
19. 已知$\angle MON$，用三角尺按下面的方法画图：

(1) 在$\angle MON$的两边OM、ON上，分别取$OA=OB$；

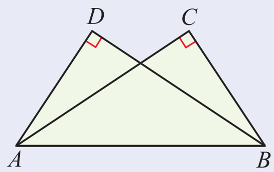
(2) 分别过点A、B作OM、ON的垂线，两条垂线相交于点C；

(3) 画射线OC．

射线OC平分$\angle MON$吗？为什么？



（第19题）



（第20题）

20. 如图，$AC\perp BC$，$AD\perp DB$，还需要什么条件，就可以使$\triangle ABC\cong\triangle BAD$，把所需的条件写在横线上．

(1) ______________________________；

(2) ______________________________．

阅读

全等变换

图 1 中，点 B、C、E 在一条直线上，$\triangle ABC \cong \triangle DCE$，我们只需把 $\triangle ABC$ 沿着直线 BC 的方向移动 BC 的长度（不离开纸面，也不转动），就能使它与 $\triangle DCE$ 完全重合. 这种改变图形位置的方法称为平移变换.

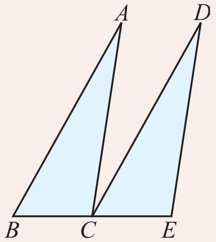


图 1

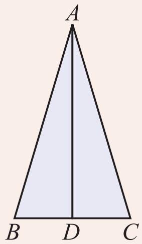


图 2

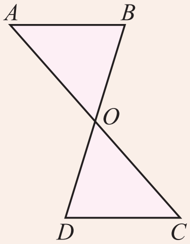


图 3

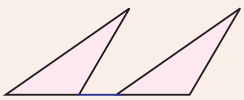
图 2 中，点 B、D、C 在一条直线上，$\triangle ABD \cong \triangle ACD$，我们只需把 $\triangle ABD$ 沿着 AD 所在直线翻折 180°，就能使它与 $\triangle ACD$ 完全重合，这种改变图形位置的方法称为翻折变换.

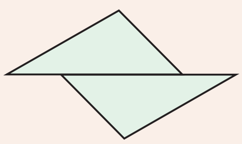
图 3 中，AC、BD 相交于点 O，$\triangle AOB \cong \triangle COD$，我们只需把 $\triangle AOB$ 绕着点 O 旋转 180°（不离开纸面），就能使它与 $\triangle COD$ 完全重合，这种改变图形位置的方法称为旋转变换.

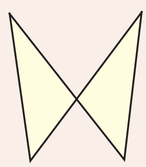
图形的平移、翻折和旋转都只改变图形的位置，而保持图形的形状、大小不变，这样改变图形的位置叫做图形的全等变换，变换前后的图形全等.

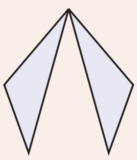
把一个图形先平移后翻折，或先旋转再平移，或先翻折再旋转，变换前后的图形也是全等的.

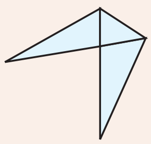
试分别说出图(1)~(6)中的一个三角形，经过怎样的全等变换就与另一个三角形重合.

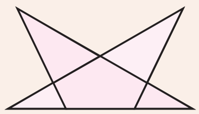

(1)


(2)


(3)


(4)

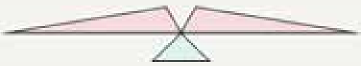

(5)


(6)

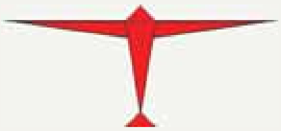
数学活动

设计象形图

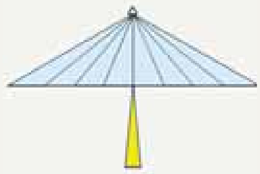
在本章里，我们欣赏了许多漂亮的图案，它们由花卉、虫鸟和简单的几何图形，采用不同的方法设计而成. 用三角形也能设计出各种有趣的图案，如图所示的大雁、飞机、花朵……这种图案我们叫它为象形图.



大雁



飞机



伞

松树

花朵

玩具风轮

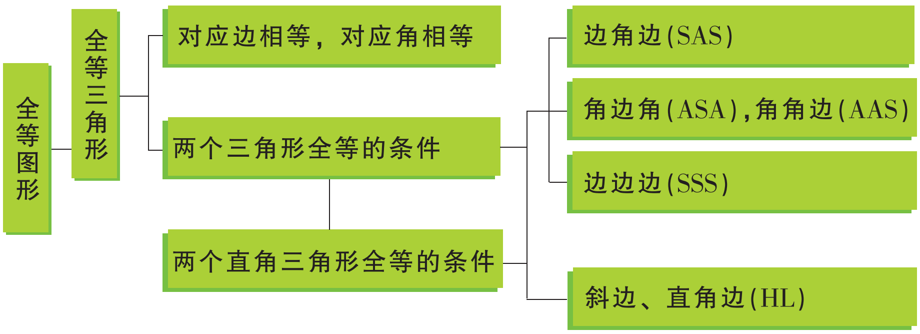
（1）欣赏这些象形图；

（2）请你设计 2~3 个象形图；

（3）向同学们展示你最满意的作品.

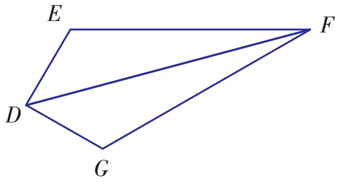
小结与思考

1. 本章的主要知识如下：



2. 两个三角形全等，通常需要 3 个条件，其中至少要有 1 组边对应相等.

3. 填空：如图，请你选择合适的条件填入空格内，使$\triangle DEF\cong\triangle DGF$.



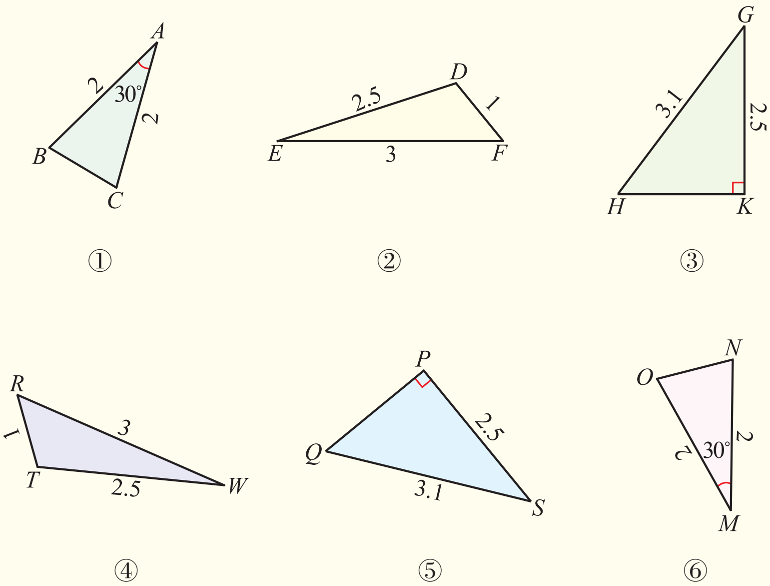
(1) 因为 $DF=DF$，____________，____________，
根据________，可以知道$\triangle DEF\cong\triangle DGF$；
(2) 因为 $DF=DF$，____________，____________，
根据________，可以知道$\triangle DEF\cong\triangle DGF$；
(3) 因为 $DF=DF$，____________，____________，
根据________，可以知道$\triangle DEF\cong\triangle DGF$；
(4) 因为 $DF=DF$，____________，____________，
根据________，可以知道$\triangle DEF\cong\triangle DGF$.

4. 角平分线有什么性质？你会用直尺和圆规画三角形的角平分线吗？
5. 举例说明三角形全等在生活中的应用.

复习题

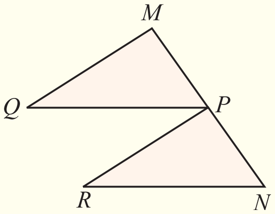
复习巩固

1. 下列图中哪些三角形全等，请表示出来并说明理由.

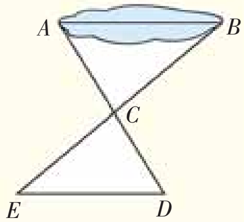


(第 1 题)

2. 如图，P 是 MN 的中点，$MQ=PR$，$PQ=NR$. $\triangle MPQ$ 与 $\triangle PNR$ 全等吗？为什么？



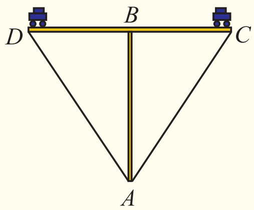
（第 2 题）



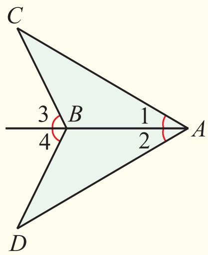
（第 3 题）

3. 如图，A、B 两点分别位于池塘两端，小明和同学们用下面的方法测量 A、B 间的距离：先取一个可以直接到达 A 和 B 的点 C，连接 AC 并延长到点 D，使 $CD=AC$，连接 BC 并延长到点 E，使 $CE=BC$，量出 DE 的长，就得到 A、B 两点间的距离. 小明和同学们的测量方法对不对？为什么？

4. 如图，两车从路段 AB 的一端 B 出发，沿着与 AB 垂直的路段 DC 反向行进相同的距离，到达 C、D 两地. 此时 C、D 到 A 的距离相等吗？为什么？



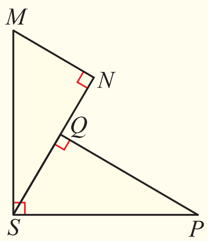
（第 4 题）



（第 5 题）

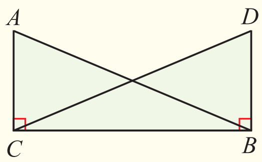
5. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，试说明 $AC=AD$ 的理由.

6. 如图，$MS\perp PS$，$MN\perp SN$，$PQ\perp SN$，垂足分别为 S、N、Q，且 $MS=PS$. 试说明 $\triangle MNS$ 与 $\triangle SQP$ 全等的理由.

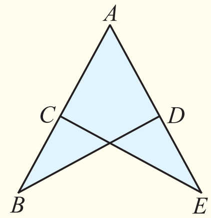


（第 6 题）

7. 如图，$AC \perp BC$，$DB \perp BC$，垂足分别为 C、B，$AB = DC$．AC 与 DB 相等吗？为什么？



（第 7 题）

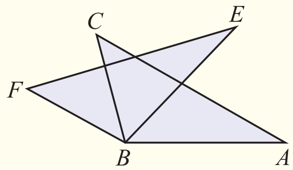


（第 8 题）

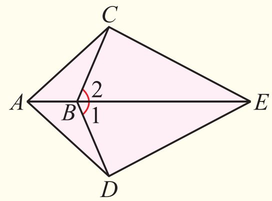
8. 如图，具备什么样的条件时，$\triangle ABD$ 与 $\triangle AEC$ 全等？

灵活运用

9. 如图，$AB = EB$，$BC = BF$，$\angle ABE = \angle CBF$．EF 和 AC 相等吗？为什么？



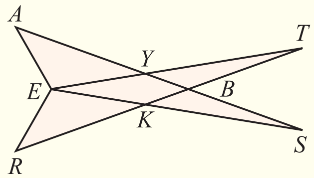
（第 9 题）



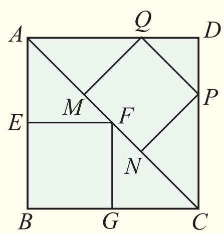
（第 10 题）

10. 如图，点 A、B、E 在一条直线上，$\angle 1 = \angle 2$，$BC = BD$．试找出图中的全等三角形，并说明理由．

11. 如图，$\angle S = \angle T$，$\angle A = \angle R$，$AE = RE$．$\triangle AES$ 和 $\triangle RET$ 全等吗？为什么？设 ET 与 AS 相交于点 Y，RT 分别交 ES、AS 于点 K、B，你还能在图中找出其他的全等三角形吗？



（第 11 题）



（第 12 题）

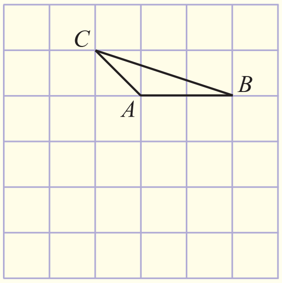
12. 如图，大正方形 $ABCD$ 中有 2 个小正方形（正方形 $BEFG$ 和正方形 $MNPQ$），且这 2 个小正方形的顶点分别在正方形 $ABCD$ 的边上或对角线 AC 上．图中有哪些全等三角形？把它们分别写出来．

探索研究

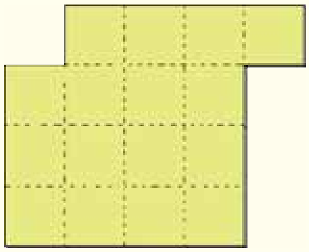
13. 如图，$\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 都在小正方形的顶点上，试在方格纸上按下列要求画格点三角形：

(1) 所画的三角形与 $\triangle ABC$ 全等且有1个公共顶点；

(2) 所画的三角形与 $\triangle ABC$ 全等且有1条公共边．

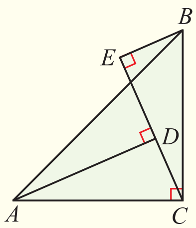


（第13题）

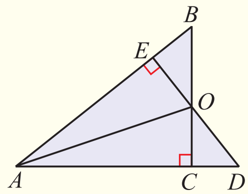

（第14题）

14. 如图，请将1个由16个小正方形组成的图形，沿正方形的网格线把它分割成两个全等形．

15. 如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$BE\perp CE$，$AD\perp CE$，垂足分别为 E、D．图中哪条线段与 AD 相等？并说明理由．



（第15题）



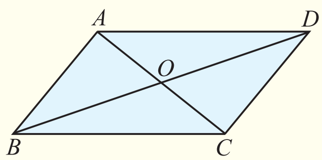
（第16题）

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AO 是角平分线，$\angle ACB=90°$，点 D 在 AC 的延长线上，DE 过点 O 且 $DE\perp AB$，垂足为 E．

(1) 请你找出图中1对相等的线段，并说明它们相等的理由；

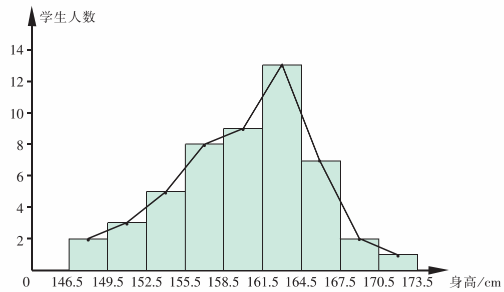
(2) 图中共有多少对相等线段，一一把它们找出来，并说明理由．

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=CB$，AC 与 BD 相交于点 O．图中有几对全等三角形？把它们一一写出来，并说明理由．



（第17题）

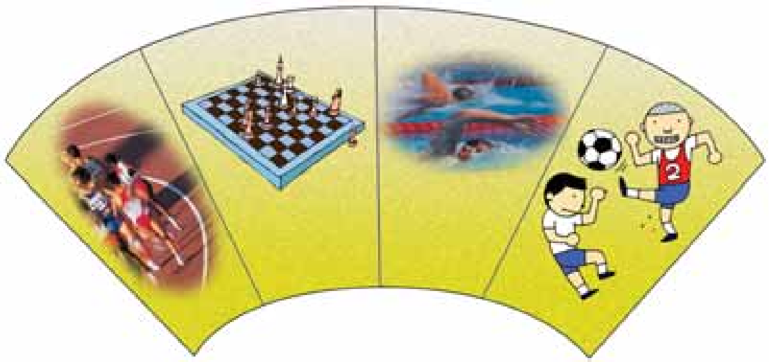
第十二章 数据在我们周围



通过数据的收集、整理、描述，

使数据提供的信息更直观更清晰.

为了了解全校同学的课外体育活动情况，需要开展调查．



设计一张调查表，调查你所在班级的同学最喜欢的课外体育活动项目，将调查的数据填入表中并用适当的统计图来分析比较这些数据．

课外体育活动项目	学生数	占全班人数的百分比

● 本章将学习通过普查和抽样调查收集数据，利用扇形统计图、条形统计图、折线统计图等图表整理、描述数据，以及列频数分布表和画频数分布直方图的方法．

12.1 普查与抽样调查

数据可以帮助我们了解周围的世界，做出正确的判断和合理的决策.

调查是收集数据的一种重要方法.

议一议

你建议如何进行下列各项调查？你认为做这些调查有什么作用？并与同学交流.

人口普查

灯泡的寿命

收视调查

测量身高、体重

新学年开始时，某校对该校每一位同学的身高进行测量.像这样，为一特定目的而对所有考察对象所做的全面调查叫做**普查**（thorough survey）.

某中学为了开展“绿色空间”主题教育，对该校的部分学生（例如100名学生）进行了“植树节是哪一天”的问卷调查．像这样，为一特定目的而对部分考查对象所做的调查叫做**抽样调查**（简称抽查）(sampling survey)．

我们将所考查的对象的全体叫做**总体**（population)，把组成总体的每一个考察对象叫做**个体**（element)，从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个**样本**（sample)，样本中个体的数目叫做样本的**容量**（size of a sample)．

为了准确了解全国人口状况，一般我国每十年进行一次全国人口普查，每五年进行一次全国1%人口的抽样调查．1995年全国1%人口抽样调查，共抽样调查了12 565 584人，占全国人口总数的1.04 %．在这项调查中，总体就是具有中华人民共和国国籍并在中华人民共和国境内常住的公民，个体就是符合这一条件的每一个公民；12 565 584人就是总体的一个样本，样本容量是12 565 584．

为了了解某市七年级学生的体重，对该市七年级全体学生的体重进行调查就是普查；而对部分学生（例如1 000名）的体重进行调查，就是抽样调查．该市七年级学生体重的全体是总体，每个七年级学生的体重就是个体，从中抽测的1 000名学生的体重就是总体的一个样本，样本的容量是1 000．

例 某灯泡厂对生产的1 000只灯泡的使用寿命进行调查，采用哪种调查方式较为合理？为什么？

解： 该调查适合采用抽样调查．例如，从1 000只灯泡中抽取10只进行检测．

因为灯泡使用寿命的检测具有破坏性，如果采用普查，1 000只灯泡将全部报废，所以这样的调查只能采用抽样调查．

你还能举出一些这样的例子吗？

议一议

你认为普查和抽样调查各有什么优缺点？举例说明．

普查是通过调查总体来收集数据，调查的结果准确，但普查往往工作量大，难度大，而且有些调查不宜使用普查．抽样调查是通过调查样本来收集数据，抽查的工作量较小，便于进行，但样本的抽取是否得当，直接关系到对总体的估计的准确程度，为了获得较为准确的调查结果，抽样时要注意所选样本的代表性．

练一练

下列各项调查，是普查，还是抽样调查？如果是抽样调查，请指出总体、个体、样本和样本的容量．

（1）调查你班每位同学穿鞋的尺码；

（2）从一批洗衣机中抽取 5 台，调查这批洗衣机的使用寿命．

习题 12.1

1. 你认为下列调查应当用普查，还是用抽样调查？并说明理由．

（1）调查长江中现有鱼的种类；

（2）了解一批电视机的使用寿命；

（3）了解你校同学最喜爱的体育运动项目．

2. 指出下列调查中的总体、个体、样本和样本的容量．

（1）从某市七年级学生中抽取 100 名学生，调查该市七年级学生每天用于学习的时间；

（2）从一批零件中抽取 10 件，调查这批零件的尺寸与规定尺寸间的误差．

3. 为了了解中小学生的视力情况，提出保护视力的建议，请你设计一个方案，调查你校七年级学生的视力状况．

4. 举例说明哪些调查适合做普查？哪些调查适合做抽样调查？

5. 请指出下列哪些调查的样本缺乏代表性．

（1）调查一个班级中学号为偶数的学生，以了解学生们对任课老师的评价；

（2）在互联网上调查中学生业余时间娱乐的主要方式；

（3）向中学生调查我国青年的健康状况．

12.2 统计图的选用

中华人民共和国从1953年到2000年共进行了5次人口普查．根据第2次到第5次人口普查的结果，每10万人受教育程度的人数情况如下：

第2次人口普查

1964年全国人口总数723 070 269人．我国每10万人中，具有大学文化程度的416人；具有高中文化程度的1 319人；具有初中文化程度的4 680人；具有小学文化程度的28 330人．

第3次人口普查

1982年全国人口总数1 031 882 511人．我国每10万人中，具有大学文化程度的615人；具有高中文化程度的6 779人；具有初中文化程度的17 892人；具有小学文化程度的35 237人．

第4次人口普查

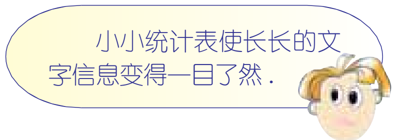
1990年全国人口总数1 160 017 381人．我国每10万人中，具有大学文化程度的1 422人；具有高中文化程度的8 039人；具有初中文化程度的23 344人；具有小学文化程度的37 057人．

第 5 次人口普查

2000 年全国人口总数 129 533 万人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 3 611 人；具有高中文化程度的 11 146 人；具有初中文化程度的 33 961 人；具有小学文化程度的 35 701 人．

我国每 10 万人受教育程度的人数统计表

普查 \ 人数 \ 受教育程度	大　学	高　中	初　中	小　学	其　他
第 2 次（1964 年）	416	1 319	4 680	28 330	65 255
第 3 次（1982 年）	615	6 779	17 892	35 237	39 477
第 4 次（1990 年）	1 422	8 039	23 344	37 057	30 138
第 5 次（2000 年）	3 611	11 146	33 961	35 701	15 581



1982 年我国每 10 万人受教育程度人数扇形统计图

数据来源：第 3 次全国人口普查

图 12–1

（1）在图 12–1 中，各个扇形分别代表了什么？

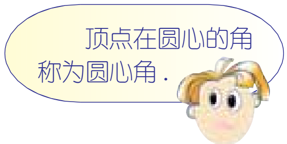
（2）1982 年我国每 10 万人中，各种受教育程度人数在总人数中所占的百分比分别是多少？

（3）在图 12-1 中，各个百分比是如何得到的？所有百分比之和是多少？

像上面的统计图，以整个圆面积代表统计项目的总体，每一统计项目分别用圆中不同的扇形面积表示，扇形面积占圆面积的百分之几就代表该统计项目占总体的百分之几．这样的统计图称为**扇形统计图**（sector statistical chart）．

议一议

1. 在图 12-1 中，统计项目的各部分的百分比与相应扇形的圆心角有什么关系？



2. 你能算出各个扇形的圆心角度数吗？

在扇形统计图中，扇形圆心角度数 = 该部分的百分比 × 360°．

做一做

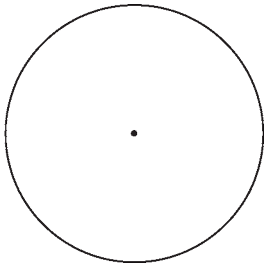
用扇形统计图表示 1990 年我国每 10 万人中各受教育程度人数在总人数中所占百分比的情况．

（1）填表：

受教育程度	人 数	占总人数的百分比（精确到 1%）	扇形的圆心角（精确到度）
大 学	1 422	$\frac{1\ 422}{100\ 000}\times 100\%\approx 1\%$	$360°\times 1\%\approx 4°$
高 中	8 039		
初 中	23 344		
小 学	37 057		
其 他	30 138		
合 计	100 000		

（2）根据上表中的数据，用量角器在圆中画出各个扇形；

______________________统计图



数据来源：__________

（3）在各个扇形上，标明相应名称和百分比；

（4）写出扇形统计图简洁的标题，并注明数据来源．

练一练

1. 根据统计表制作扇形统计图，表示各大洲陆地面积占地球陆地总面积的百分比．

（1）计算各大洲陆地面积占地球陆地总面积的百分比；

（2）计算各大洲对应的扇形圆心角的度数；

（3）画出扇形统计图．

世界七大洲陆地面积统计表

洲　名	面积/万 km^2	占地球陆地总面积的百分比
亚　洲	4 400	
非　洲	3 020	
北美洲	2 422.8	
南美洲	1 797	
南极洲	1 400	
欧　洲	1 016	
大洋洲	897	

2. 某市有 5 类学校，各类学校占该市总校数的百分比如下：

幼儿园	小学	中学	高等院校	其他
40%	30%	20%	5%	5%

（1）画扇形统计图表示表中的信息；

（2）如果该市高等院校有 40 所，那么共有学校多少所？中学有多少所？

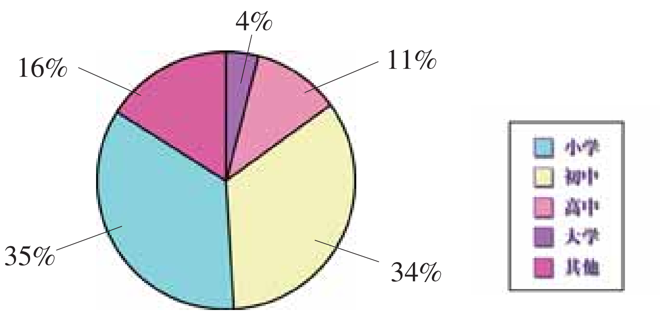
3. 某中学七年级(2)班 45 名同学来自不同的小学：

小学	A 小学	B 小学	C 小学	D 小学	E 小学	其他
人数	15	10	3	5	3	9

（1）画扇形统计图表示表中的信息；

（2）调查你们班同学来自不同小学的情况，并用扇形统计图表示 .

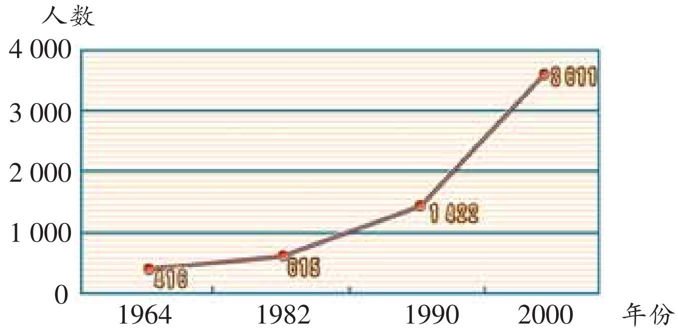
2000 年我国每 10 万人受教育程度人数扇形统计图



数据来源：第 5 次全国人口普查

图 12–2

1964~2000 年我国每 10 万人中具有大学教育程度人数折线统计图



数据来源：中国国家统计局

图 12–3

2000 年我国每 10 万人受教育程度人数条形统计图

数据来源：第 5 次全国人口普查

图 12–4

1. 你能从图 12–2、图 12–3、图 12–4 中的哪幅统计图明显看出：

（1）2000 年每 10 万人中具有初中文化程度的人数约占多少？

（2）每 10 万人中具有大学文化程度人数的变化趋势？

（3）2000 年每 10 万人中具有初中文化程度的人数是多少？

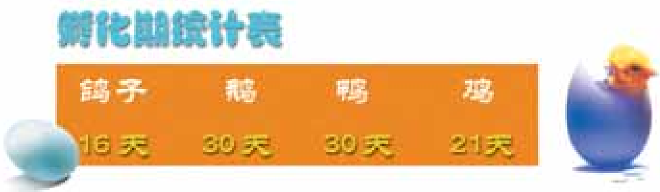
2. 比较 3 种统计图的特点，并相互交流．

扇形统计图能清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比；折线统计图能清楚地反映事物的变化情况；条形统计图能清楚地表示出每个项目的具体数目．

制作适当的统计图表示下列数据：

（1）2000 年某市平均每人每月消费性支出 446 元，其中食品占 40.6%，衣着占 12.2%，家庭设备用品及服务占 7.0%，医疗保健占 5.9%，交通和通讯占 8.7%，娱乐、教育、文化服务占 12.7%，居住占 8.6%，杂项商品占 4.3%；

（2）孵化期统计表：


孵化期统计表

鸽子	鹅	鸭	鸡
16 天	30 天	30 天	21 天

(3) 我国不同年份的国内生产总值统计表：

年 份	1952 年	1962 年	1970 年	1980 年	1990 年	2000 年
国内生产总值/亿元	679	1 149.3	2 252.7	4 517.8	18 547.9	89 404

数学实验室

用计算机画统计图

我们利用 Microsoft Office 软件中的 Excel 可以很方便地画统计图．

小明某星期在校体育活动时间统计表（单位：min）

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
25	30	45	20	50

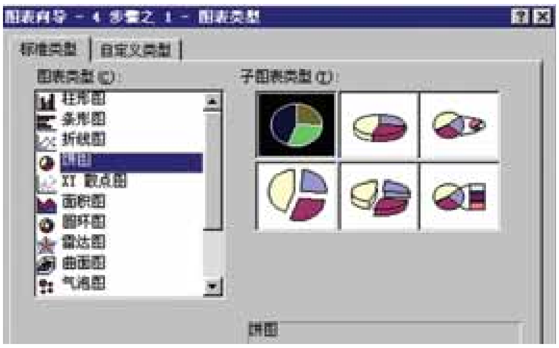
在 Windows 下，单击 开始 屏幕上出现 Windows 的菜单条，选择其中的程序，单击 Microsoft Excel

打开 Excel，进入 Excel 窗口．

填写文字和数据：

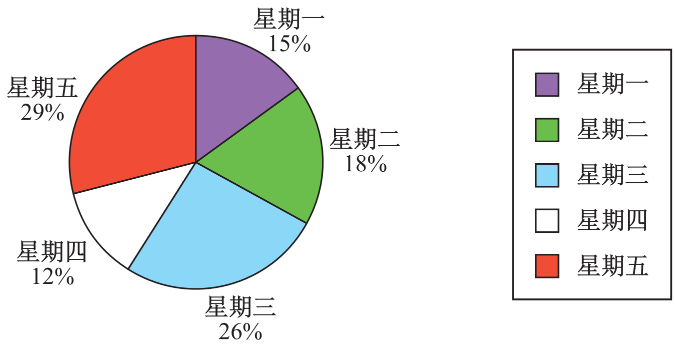
星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
25	30	45	20	50

选中你填入的格子，然后按下 “图表向导” 钮，屏幕出现下面的画面：



选择你要画的统计图类型，例如扇形统计图，按照提示一步一步去做，便可得到你要画的统计图：

小明某星期在校体育活动时间



按照上面示例的程序，画出小明某星期在校体育活动时间的条形统计图和折线统计图．

习题 12.2

1. 在第 27 届悉尼奥运会上，我国体育健儿取得了辉煌的成绩．

第 27 届奥运会金牌榜

国　家	美　国	俄罗斯	中　国	澳大利亚	德　国	其　他
金牌数/枚	39	32	28	16	14	172

分别画出美国、俄罗斯、中国、澳大利亚、德国及其他国家和地区在第 27 届悉尼奥运会上所获金牌数的扇形统计图和条形统计图.

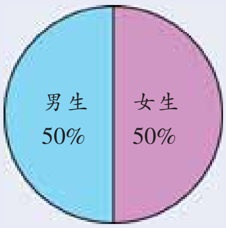
2. 用扇形统计图表示下面的信息:

(1) 全班 45 名同学中，有 6 人最喜欢打篮球，24 人最喜欢打乒乓球，7 人最喜欢踢足球，8 人最喜欢打排球;

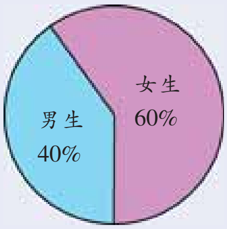
(2) 全年级 362 名同学中，有 49 人最喜欢打篮球，193 人最喜欢打乒乓球，55 人最喜欢踢足球，65 人最喜欢打排球.

根据画的扇形统计图，你发现了什么?

3. 根据下列的两个扇形统计图，你能判断哪一所学校的男生人数多吗? 为什么?



A 校



B 校

(第 3 题)

4. 制作适当的统计图表示下列信息:

(1) 空气的主要成分 (除去水汽、杂质等) 是: 氮气，占 78.09 %; 氧气，占 20.94 %; 氩气，占 0.93 %; 其他微量气体 (如氖气、氦气、二氧化碳等) 占 0.04 %;

(2) 某中学 1 500 名同学上学，步行的 300 人，骑自行车的 950 人，乘公共汽车的 200 人，其他的 50 人;

(3) 某企业的年利润如下表所示:

年　份	2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年
利润/万元	70	200	310	380	450

5. 第 5 次全国人口普查公报 (第 1 号) 公布: 祖国大陆 31 个省、自治区、直辖市和现役军人中，0~14 岁的人口为 28 979 万人，占总人口的 22.89%; 15~64 岁的人口为 88 793 万人，占总人口的 70.15%; 65 岁及以上的人口为 8 811 万人，占总人口的 6.96%. 同 1990 年第 4 次

全国人口普查相比，0~14 岁人口的比重下降了 4.80 个百分点，65 岁及以上人口的比重上升了 1.39 个百分点.

请选择适当的统计图表示、分析上面的信息，你能得出什么结论？并与同伴交流.

6. 两支篮球队 4 场对抗赛的结果如下（单位：分）：

得分 场次 球队	第 1 场	第 2 场	第 3 场	第 4 场
球队 1	66	72	88	90
球队 2	95	90	89	80

可以用哪些统计图来分析比较这些数据？

(1) 画出你设计的统计图；

(2) 你能否从统计图中直接读出某支篮球队的每场比赛成绩？

(3) 你是怎样评价这两支球队的？如果再举行一场比赛，你预测结果会如何？

（第 6 题）

12.3 频数分布表和频数分布直方图

数学实验室

为了增强环境保护意识，学校举办“环保节”，要求每班选出 1 名“环保小卫士”，选举办法如下：

(1) 民主提名候选人，全班同学举手表决，得票数较多的前 3 名为正式候选人；

(2) 在统一发放的白纸（选票）上，各自写上你认为应当选的 1 名候选人名字；

(3) 将选票投入投票箱；

(4) 由全班推选的 3 位同学分别唱票、监票和记录统计；

(5) 根据统计结果，得票最多的同学当选为“环保小卫士”.

候选人	唱票记录	得票数	得票率

在记录数据时，候选人的名字出现的次数有的多，有的少，或者说它们出现的频繁程度不同.通常，每个对象出现的次数用“划记”的方法累计（例如，1 票 1 划，5 票为 1 “正”）.某个对象出现的次数称为**频数** (absolute frequency)，频数与总次数的比值称为**频率**（relative frequency）.

议一议

1. 选举“环保小卫士”用的是哪种调查方法？

2. 每位候选人得票的频数指的是什么？

3. 每位候选人得票的频率指的是什么？

4. 你认为，通过选举产生“环保小卫士”与指定某同学为“环保小卫士”这两种方法，哪种更好？

练一练

2001 年 12 月 25 日，国家环保局公布了 47 个重点城市的空气质量如下：

城市	郑州	武汉	长沙	广州	深圳	珠海	汕头	湛江	南宁	桂林	北海
污染指数	85	99	107	119	94	78	67	51	111	52	62

海口	成都	重庆	贵阳	昆明	拉萨	西安	兰州	西宁	银川	乌鲁木齐	北京
49	114	174	96	74	76	128	128	97	65	205	64

天津	石家庄	秦皇岛	太原	呼和浩特	沈阳	大连	长春	哈尔滨	上海	南京
81	98	73	125	124	138	68	90	98	86	74

苏州	南通	连云港	杭州	宁波	温州	合肥	福州	厦门	南昌	济南	青岛	烟台
89	79	71	92	80	82	81	79	66	101	93	73	53

空气质量等级划分如下：空气污染指数 1~50 为Ⅰ级，51~100 为Ⅱ级，101~200 为Ⅲ级，201~300 为Ⅳ级. 请按城市空气质量级别填表：

空气污染指数	1~50（Ⅰ级）	51~100（Ⅱ级）	101~200（Ⅲ级）	201~300（Ⅳ级）
划　记				
频　数				
频　率				

七年级学生的身高在什么范围内？整体分布情况如何？

首先，抽样测量某中学七年级 50 名同学的身高，结果如下（单位：cm）：

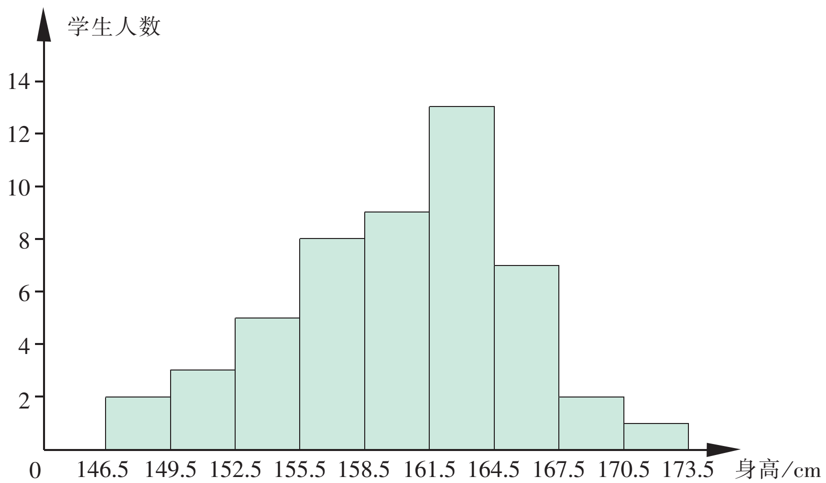
150	148	159	156	157	163	156	164	156	159
169	163	170	162	163	164	155	162	153	155
160	165	160	161	166	159	161	157	155	167
162	165	159	147	163	172	156	165	157	164
152	156	153	164	165	162	167	151	161	162

然后，再将这些数据进行适当的整理，将其分组．上述 50 个数据中，最小值为 147 cm，最大值为 172 cm，它们相差 25 cm．如果取组距为 3 cm（每组两个端点之间的距离称为组距），那么$\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$，可将这批数据分为 9 组．通常数据越多，分的组数也越多，当数据在 100 个以内时，按照数据的多少分成 5~12 组．为了使每个数据都落在相应的组内，可取比数据多一位小数来分组，并把第 1 组的起点略微减小一点．把上述数据分别“划记”到相应的组中，统计每组中相应数据出现的频数，如下表：

身高分组	频数划记	频　数
146.5~149.5	丅	2
149.5~152.5	下	3
152.5~155.5	正	5
155.5~158.5	正 下	8
158.5~161.5	正 正	9
161.5~164.5	正 正 下	13
164.5~167.5	正 丅	7
167.5~170.5	丅	2
170.5~173.5	一	1
合　计		50

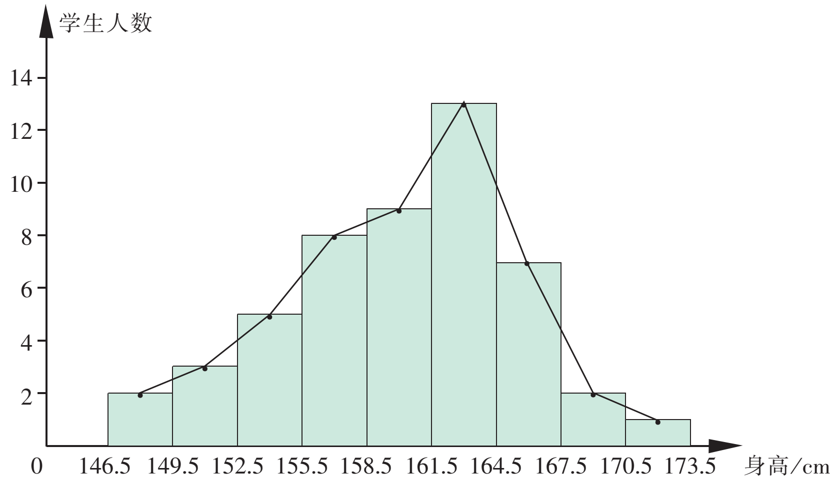
像上述这样的表格就是**频数分布表**（table of distribution of absolute frequencies）．

根据上表绘制频数分布**直方图**（histogram）如下：



频数分布直方图直观地给出了样本中学生身高处于各个组内的人数，由此可估计该年级学生身高的整体分布状况．

为了更好地刻画数据的总体规律，我们将每个小长方形上面一条边的中点顺次用折线连接起来，就得到如下频数折线图．



由此频数折线图，我们可以清晰地感受到七年级学生身高的分布状况．

做一做

调查你所在班级同学的身高，将数据适当分组，列出频数分布表，并绘制成相应的频数分布直方图．

想一想

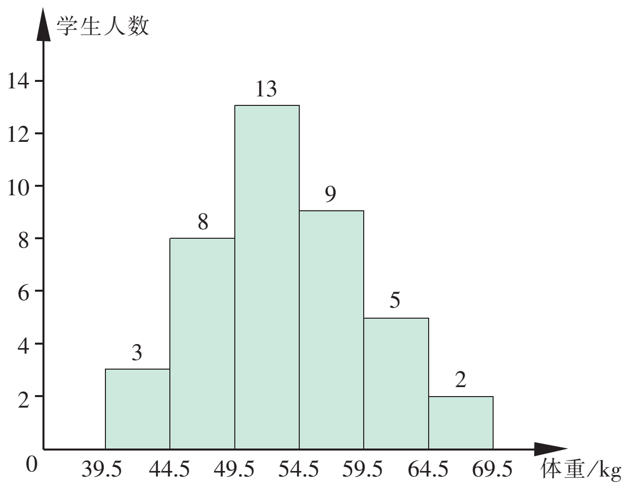
条形统计图、扇形统计图、折线统计图和频数分布直方图，从不同的角度清楚、有效地描述数据．请你说说它们各有什么特点，并与同学交流．

练一练

1. 根据某班 40 名同学的体重频数分布直方图，回答下列问题：

（1）体重在哪个范围内的人数最多？

（2）体重超过 59.5 kg 的同学占全班同学的百分之几？



(第 1 题)

2. 为了研究 400 m 赛跑后学生心率的变化情况，体育老师统计了全班 45 名同学在赛跑后 1 min 内的脉搏次数，结果如下：

132 136 138 141 143 144 144 146 146 147 148 149 149 151 151
152 153 153 154 154 154 156 156 157 157 157 158 158 158 159
159 161 161 162 162 163 163 164 164 164 164 166 168 159 159

(1) 按组距为 5 将上述数据整理成频数分布表；

(2) 依据(1)绘制频数分布直方图以及频数折线图 .

习题 12.3

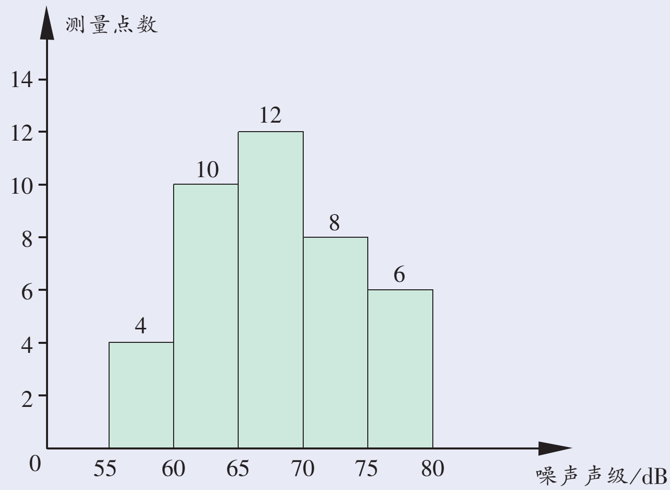
1. 为了了解学生每天收看电视的时间，对七年级(1)班抽样调查 28 名学生，所得的数据如下(单位：min)：

10	20	20	20	30	10	30
20	0	40	10	20	20	40
20	30	10	30	0	30	10
30	10	20	20	40	10	20

(1) 用频数分布表表示这些数据；

(2) 每天收看电视的时间少于 25 min 的学生占百分之几?

2. 为了调查噪声污染情况，环保局抽样调查了 40 个噪声测量点的噪声声级 (单位：dB)，结果如下：



（第 2 题）

（1）在噪音最高的测量点，其噪音水平在哪个范围？

（2）噪音水平低于 65 dB 的测量点有多少个？

3. 某班同学一次数学测验成绩如下（单位：分）：

64　85　92　54　70　82　62　70　92　79　82　81　68　77　82

80　95　62　70　90　71　71　88　82　87　91　89　86　68　72

97　54　67　75　78　84　88　76　88

（1）按组距为 10 对数据分组，并列出频数分布表；

（2）绘制频数分布直方图以及频数折线图；

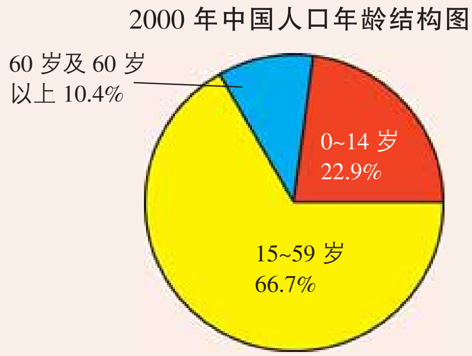
（3）大部分同学处于哪个分数段？成绩的整体分布情况怎样？

阅读

“读图时代”

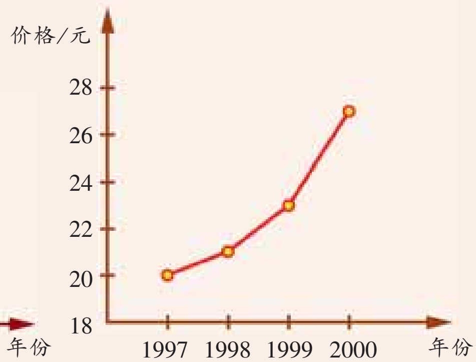
人们在日常生活、学习和工作中经常会看到各种数据和统计图表，有人称我们进入了一个“读图时代”.

生活在“读图时代”，首先我们必须能从大量的“图”中获取有价值的信息. 比如，下图是某家媒体公布的中国人口发展情况统计图和 2000 年中国人口年龄结构统计图，你能从中获得哪些信息？你能根据这些信息分析中国的人口变化情况吗？



除了能读懂“图”、从各种渠道（报刊、杂志、电视、广播、书籍、互联网等）获取数据信息外，我们还必须理智地对待这些数据、图表信息，因为媒体、广告等公布的数据、图表信息可能会产生误导．比如，根据下表中的数据绘制的两幅折线统计图，表示的是同一个公司股票价格的变化情况，但两条折线显示的增长幅度却有着显著的差别．

年　份	1997 年	1998 年	1999 年	2000 年
股票最高价格/元	20	21	23	27



因此，生活在“读图时代”，不仅要能从数据、图表中获取尽可能多的信息，而且要能对数据的来源、收集数据的方法、数据的描述方法，以及得出的推论进行合理的质疑．

数学活动

心率的调查

心率是指单位时间内心脏搏动的次数．一般指每分钟的心跳次数．正常的成年人安静时的心率约为 60~100 次/分（平均心率在 75 次/分左右）；新生儿的心率约为 130~150 次/分；2~4 岁儿童约为 110~120 次/分，尔后逐年减少，14 岁以后，儿童的心率逐渐接近成年人．

（1）测量自己的心率；

（2）收集、整理全班同学的心率，并用适当的统计图表示；

（3）心率总体分布情况如何？哪个心率范围的学生数最多？

小结与思考

1. 数据可以帮助我们了解周围的世界，做出合理的决策．
2. 利用数据解决简单问题的过程如下：

提出问题—收集数据—整理和表示数据—分析数据—解决问题

3. 收集数据的方法有：调查、试验、查阅资料等．
4. 统计调查有普查和抽样调查两种方式．普查是通过调查总体来收集数据，抽样调查是通过调查样本来收集数据．普查和抽样调查的优、缺点各是什么？
5. 对收集得到的数据，可通过“划记”的方法整理成频数分布表．频数是指某对象出现的次数．频率是指频数与总次数的比值（或者百分比）．
6. 利用统计图表整理描述数据，可以使我们了解数据的分布特征和规律，帮助我们从数据中获取信息、做出决策．常见的统计图、表各有什么特点？举例说明．
7. 统计与生活息息相关，打开报纸杂志或互联网常常会看到一些统计图表．请你找一份统计图表，并对其中的数据进行分析，发表你的看法．

复习题

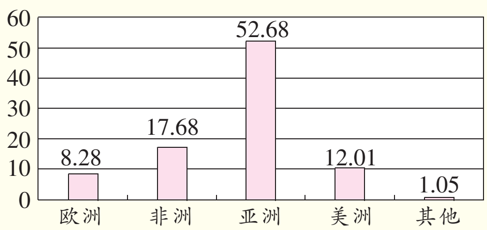
复习巩固

1. 下列调查收集数据的活动中，哪些适合普查，哪些适合抽样调查？
   (1) 夏季冷饮市场上冰淇淋的质量；
   (2) 某本书上的印刷错误；
   (3) 对学校建立英语角的看法；
   (4) 公民保护环境的意识．

2. 为了鼓励学生课外阅读，学校公布了“阅读奖励计划”方案，征求学生的意见，赞成、反对、无所谓三种意见的人数之比 7∶2∶1．如图所示的扇形统计图表示上述分布情况：
   (1) 如果持反对意见的有 240 人，求这个学校的学生总数；
   (2) 求各个扇形的圆心角的度数．

（第 2 题）

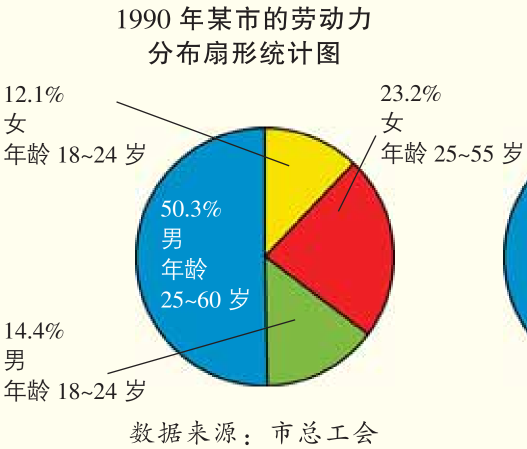
3. 2050 年世界人口预测条形统计图（单位：亿）如下：

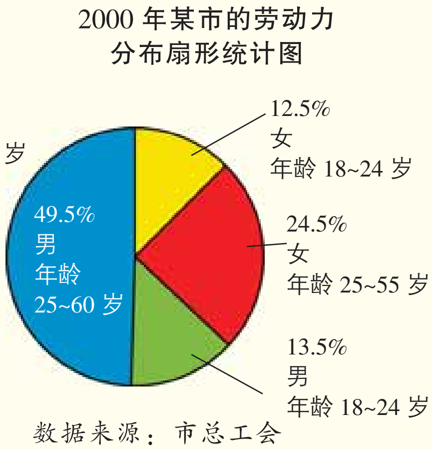


（第 3 题）

根据图中的数据制作扇形统计图，表示 2050 年世界人口分布预测，并比较它与条形统计图的区别．

4. 某市 1990 年有劳动力 2 400 000 人，2000 年有劳动力 2 800 000 人．该市 1990 年和 2000 年劳动力分布情况如图：
   (1) 2000 年该市劳动力比 1990 年增加了百分之几？
   (2) 1990 年和 2000 年该市男性劳动力各占百分之几？
   (3) 2000 年该市男性劳动力比 1990 年增加了多少？该市男性劳动力的百分数也增加了吗？





（第 4 题）

5. 调查全班 44 名同学上学途中所花时间. 所得数据如下（单位：min）：

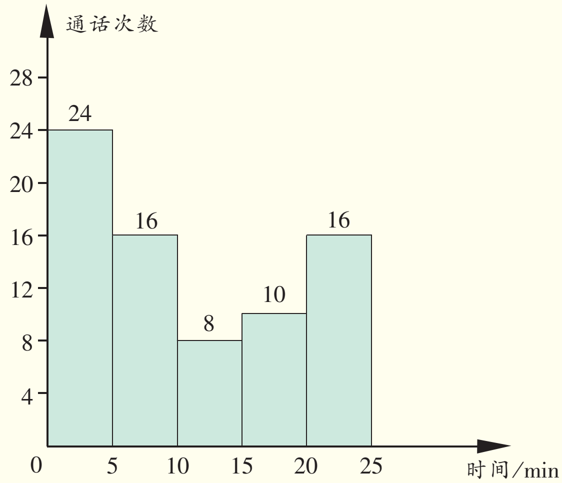
15	5	5	10	15	20	35	15	15	30	5
5	10	5	10	15	5	10	15	15	15	15
15	5	10	10	15	5	10	15	15	30	15
10	25	20	5	15	15	30	10	5	10	35

（第 5 题）

（1）将这些数据分成小于 15 min、等于 15 min 和大于 15 min 三类，列出频数分布表；

（2）将（1）中的频数分布表用扇形统计图表示．

6. 小明统计了他家 5 月份的电话通话时间，并绘制成如下的频数分布直方图：



(1) 小明家5月份一共打了多少次电话?

(2) 通话时间不超过15 min的有多少次?

7. 在某长途汽车站，小明抽样调查了部分旅客的等车时间，并列出下面的频数分布表:

等车时间 x min	$0<x\leqslant6$	$6<x\leqslant11$	$11<x\leqslant16$	$16<x\leqslant21$	$21<x\leqslant26$	$26<x\leqslant31$	$31<x\leqslant36$	$36<x\leqslant41$
频 数	2	3	6	8	16	7	5	2

(1) 小明共抽样调查了多少名旅客?

(2) 组数是多少? 组距是多少?

(3) 绘制相应的频数分布直方图和频数折线图.

灵活运用

8. 据报道:“2003年中国科学院新增加院士58名……年龄最大的75岁，最小的37岁，平均年龄为58.86岁，其中60岁(含60岁)以下50岁以上28人，占48.28%，50岁(含50岁)以下的12人，占20.69%. 与2001年相比，新当选院士平均年龄下降了1.56岁，其中60岁以下(含60岁)所占比例提高了近9个百分点.”

(1) 请你整理上述材料中有关新增加院士的数据，并填入下表:

年龄/岁	60岁以上	50~60岁(含60岁)	50岁以下(含50岁)
人 数			
百分比			

(2) 你认为用哪种统计图反映新增加院士的年龄分布情况比较合适? 并画出你选用的统计图.

9. 下表为王先生2001年1月到6月每月的收入和支出情况:

月份	1月	2月	3月	4月	5月	6月
收入/元	1 400	1 100	1 350	1 800	1 500	1 450
支出/元	800	650	500	1 050	900	750

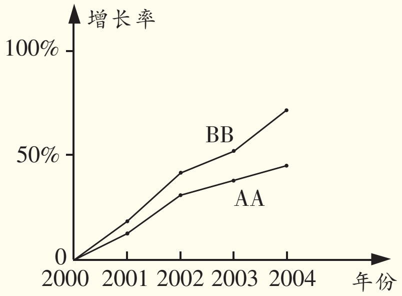
(1) 分别用条形统计图和折线统计图表示王先生 2001 年 1 月到 6 月每月的收入和支出情况；

(2) 根据(1)，王先生哪个月的结余最多？

10. 根据下面的折线统计图回答问题：

(1) BB 牌方便面的销售量比 AA 牌多吗？说说你的理由，要做出这样的断定还需要什么资料？

(2) 图中两条折线能说明 BB 牌方便面在什么方面领先？



(第 10 题)

11. 随着我国对外开放程度的不断扩大，我国对外贸易迅速发展．下表是我国近几年的进出口额数据．请用适当的统计图来描述这两组数据，并对它们进行比较．

年　份	2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年
出口额/亿美元	2 492	2 662	3 256	4 384	5 934
进口额/亿美元	2 251	2 436	2 952	4 128	5 614

12. 农业科研人员在试验田里种植了一种大麦新品种，为了考察麦穗长度的分布情况，抽取了 100 个麦穗，量得长度如下（单位：cm）：

6.3	5.8	5.5	5.3	6.0	6.4	6.8	6.2	5.8	6.5
5.7	5.3	6.2	6.4	5.4	5.8	6.0	5.4	5.5	6.4
6.8	7.0	6.1	5.7	6.5	5.9	6.3	5.0	6.0	6.7
6.1	6.0	5.3	6.7	6.0	5.7	5.5	5.0	6.5	5.8
4.5	6.0	6.2	6.2	6.8	6.8	5.0	6.8	5.1	5.9
5.6	5.9	6.8	5.6	5.8	6.6	6.3	6.0	6.5	5.9

6.3	5.4	6.6	6.0	6.3	6.0	5.2	5.0	5.3	5.2
6.0	6.0	4.7	6.7	6.0	6.4	5.7	5.9	4.0	6.0
5.8	5.2	5.7	6.7	6.3	5.7	7.0	6.0	5.5	5.4
6.3	6.0	5.7	6.0	5.6	7.4	6.4	5.5	5.8	4.6

(1) 请指出这次调查的总体、个体、样本和样本容量；

(2) 列出样本的频数分布表；

(3) 绘制频数分布直方图和频数折线图；

(4) 分析数据分布的情况 .

探索研究

13. 调查全班每位同学 1 min 跳绳次数 . 每 3 人 1 组，1 人跳绳，1 人计时，1 人记录，然后全班汇总 .

(1) 将全班同学 1 min 跳绳次数，适当分组整理成频数分布表，并绘制频数分布直方图以及频数折线图；

(2) 全班同学 1 min 跳绳次数分布情况如何?

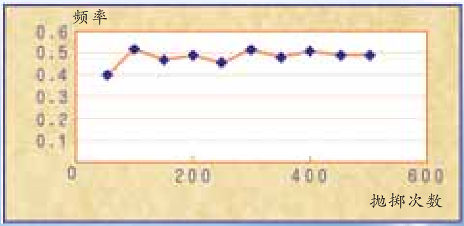
14. 通过查阅资料收集今年你所在地区每天空气污染指数 .

(1) 将收集的数据整理成频数分布表，并用适当的统计图表示；

(2) 分析空气污染的原因，并尝试提出几条改善空气质量的建议 .

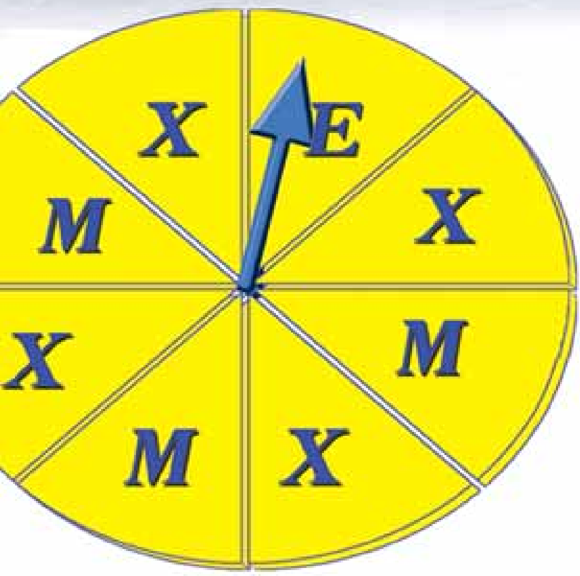
(http：www.zhb.gov.cn/quality/air.php3)

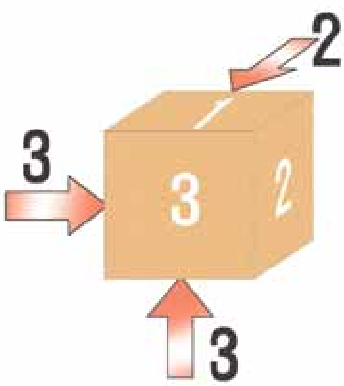
第十三章 感受概率



事件发生的可能性有大有小．

概率度量事件发生的可能性的大小．





（1）从袋子中任意摸出 1 个球，摸到的球可能是什么颜色？

（2）从袋子中任意摸出 1 个球，摸到哪种颜色的球的可能性最大？

（3）如果将每个球都编上号码，分别记为 1 号球（红）、2 号球（红）、3 号球（红）、4 号球（白）、5 号球（白）、6 号球（黄），那么摸到 1~6 号球的可能性一样吗？

● 本章将研究事件发生的可能性，初步感受概率．

13.1 确定与不确定

在某次国际乒乓球单打比赛中，甲、乙两名中国选手进入最后决赛，那么，该项比赛的

(1) 冠军属于中国吗？

(2) 冠军属于外国选手吗？

(3) 冠军属于中国选手甲吗？

在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定不会发生，这样的事情是**不可能事件**（impossible event）．例如，“上述比赛中，冠军属于外国选手”、“明天太阳从西方升起”等都是不可能事件．在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定会发生，这样的事情是**必然事件**（certain event）．例如，“上述比赛中，冠军属于中国”、“抛出的篮球会下落”等都是必然事件．必然事件和不可能事件都是确定事件．

太阳从东方升起

抛掷硬币

在一定条件下，生活中也有很多事情我们事先无法确定它会不会发生，这样的事情是**随机事件**（random event）．例如，“上述比赛中，冠军属于中国选手甲”、“抛掷1枚均匀硬币正面朝上”等都是随机事件．

议一议

举出一些生活中的必然事件、不可能事件和随机事件．

练一练

1. 下列事件中，哪些是不可能事件？哪些是必然事件？哪些是随机事件？

(1) 抛掷1个均匀的骰子，6点朝上；

(2) 367 人中有 2 人的生日相同；

(3) $1+3>2$；

(4) 打开电视，它正在播广告；

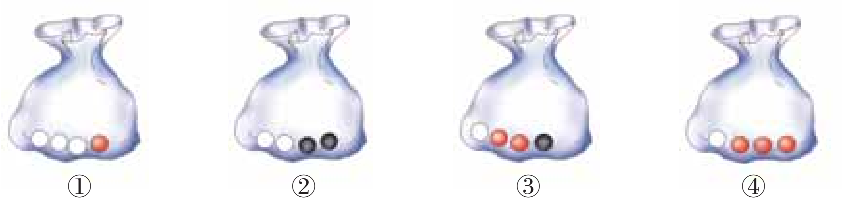
(5) 小明家买彩票将获得 500 万元彩票大奖；

(6) 3 天内将下雨；

(7) 在妇幼保健医院里，下一个出生的婴儿是女孩；

(8) 你最喜爱的篮球队将夺得 CBA 冠军．

2. 4 个不透明的袋子里都装有一些球，每个球除颜色外都相同，将球摇匀．下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件？并说明理由．



(第 2 题)

(1) 从第一个袋子中任意取出 1 个球，该球是红色的；

(2) 从第二个袋子中任意取出 1 个球，该球是红色的；

(3) 从第三个袋子中任意取出 1 个球，该球是红色的；

(4) 从第四个袋子中任意取出 1 个球，该球是红色的；

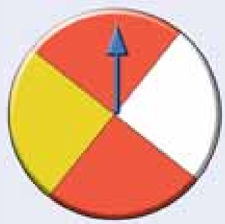
(5) 从这 4 个袋子中各取出 1 个球，取出的 4 个球的颜色是红、白、黑 3 种颜色．

习题 13.1

下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件？

(1) 在标准大气压下，温度低于 0℃时冰融化；

(2) 自由转动转盘，转盘停止后指针指向红色区域；(本套教材规定：若指针落在交界线上，则它属于相邻的逆时针区域．)



(3) 从装有红色、白色、黑色等几种颜色小球的不透明袋子中任意摸出 1 个球，该球是红色的．

13.2 可能性

数学实验室

如图 13–1，不透明的袋子中装有 3 个白球和 7 个红球，每个球除颜色外都相同．

(1) 你认为从中任意摸出 1 个球，摸到哪种颜色球的可能性大？

(2) 每位同学从袋子中摸 1 个球，记下所摸球的颜色，然后将球放回并摇匀；

(3) 按(2)的方法全班同学轮流摸球，并将全班试验结果填入下表：

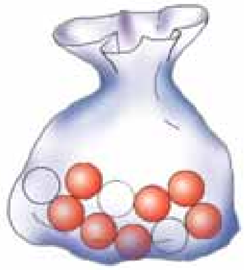


图 13–1

试验结果	频　数	频　率
摸到红球		
摸到白球		

在上面的摸球试验中，每次摸到的球的颜色是随机的．由于白球和红球的数量不等，所以摸到红球的可能性与摸到白球的可能性是不一样的．

一般地，随机事件发生的可能性有大有小．

下面，我们主要研究随机事件以及这类事件发生的可能性大小．

议一议

1. 如图 13–2，5 个不透明的袋子中分别装有 10 个球，每个球除颜色外都相同．

(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

图 13–2

从各个袋子中摸到白球的可能性一样大吗？请将袋子的序号按摸到白球的可能性从小到大的顺序排列．

2. 旋转如图 13–3 的转盘．

（1）当转盘停止转动时，你认为指针落在哪种颜色区域上的可能性最大？指针落在哪种颜色区域上的可能性最小？

（2）全班同学轮流转动转盘，当转盘停止转动时，记下指针所落区域的颜色，把全班结果汇总并填入下表：

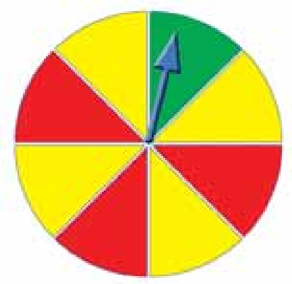


图 13–3

试验结果	频数	频率
指针落在红色区域		
指针落在黄色区域		
指针落在绿色区域		

（3）你的看法与试验所得的结果相符吗？

在这个试验中，任意旋转转盘 1 次，当转盘停止时，指针落在哪种颜色区域上是不确定的．由于各颜色区域的面积不等，所以指针落在不同颜色区域上的可能性大小也不一样．

练一练

1. 根据你的判断，下列事件发生的可能性哪个大？哪个小？并把这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列．

（1）从装有 1 个红球和 2 个黄球的袋子中摸出的 1 个球恰好是白球；

（2）一副去掉大、小王的扑克牌中，随意抽取 1 张，抽到的牌是红色的；

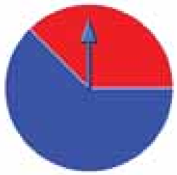
（3）调查商场中的一位顾客，他是闰年出生的；

（4）随意遇到一位青年，他接受过九年制义务教育；

（5）站在平地上抛一块小石头，石头会下落．

2. 列出下列各事件发生的所有可能结果，并分别指出哪种结果出现的可能性最大．

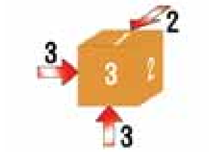
（1）分别旋转如图①、②的两个转盘；



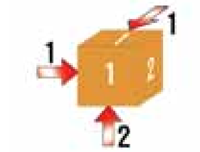
①

②

（第 2(1)题）



①



②

（第 2(2)题）

（2）分别抛掷如图①、②的两枚骰子．

飞机失事会给旅客造成意外伤害．一家保险公司要为购买机票的旅客进行保险，应该向旅客收取多少保险费呢？为此保险公司必须计算出飞机失事的可能性多大．类似这样的问题在我们的日常生活中也经常遇到．例如：

抛掷 1 枚均匀硬币，正面朝上的可能性多大？

在装有彩球的袋子中，任意摸出的 1 个球恰好是红球的可能性多大？

明天下雨的可能性多大？

抛掷 1 枚均匀骰子，6 点朝上的可能性多大？

……

随机事件发生的可能性有大有小．一个事件发生可能性大小的数值，称为这个事件的**概率**（probability）．如果用 A 表示一个事件，那么我们就用 $P(A)$表示事件 A 发生的概率．

通常规定，必然事件 A 发生的概率是 1，记作 $P(A)=1$；不可能事件 A 发生的概率为 0，记作 $P(A)=0$；随机事件 A 发生的概率 $P(A)$是 0 和 1 之间的一个数．

对于一个随机事件，它发生的概率是由它自身决定的，并且是客观存在的，概率是随机事件自身的属性．它反映这个随机事件发生的可能性大小．

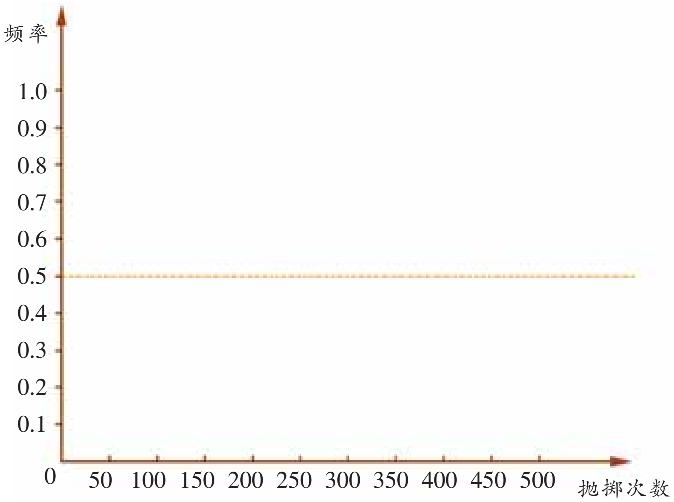
数学实验室

全班同学做抛掷硬币试验，每人 10 次．

（1）分别汇总 5 人，10 人，15 人，…，50 人的试验结果，并将试验数据汇总填入下表：

汇总的抛掷的次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	…
正面朝上的频数 m											
正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$											

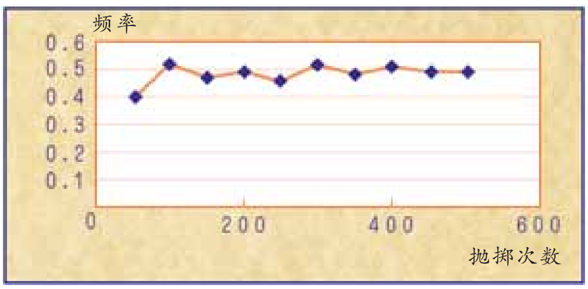
（2）根据上表，完成下面的折线统计图：



（3）观察上面的折线统计图，你发现了什么？并与同学交流．

下面是小明抛掷硬币试验获得的数据以及绘制的折线统计图．

抛掷次数	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
正面朝上的频数	20	53	70	98	115	156	169	202	219	244
正面朝上的频率	0.4	0.53	0.47	0.49	0.46	0.52	0.48	0.51	0.49	0.49



观察折线统计图，当抛掷硬币次数很大时，正面朝上的频率是否比较稳定？

下表是自 18 世纪以来一些统计学家进行抛硬币试验所得的数据：

统计学家历次抛掷硬币的试验结果

试验者	试验次数 n	正面朝上的次数 m	正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$
布丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勤	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

从上表可以看出，“正面朝上”的频率总在 $\frac{1}{2}$ 附近波动，而且近似等于 $\frac{1}{2}$.

我们发现，在充分多次试验中，一个随机事件的频率一般会在一个常数附近摆动，通常试验次数越多，摆动幅度越小．这个性质称为频率的稳定性．

再看下面的表 1 和表 2．

表 1　某批足球产品质量检查结果表

抽取球数 n	50	100	200	500	1 000	2 000
优等品数 m	46	93	194	472	953	1 903
优等品频率 $\frac{m}{n}$	0.92	0.93	0.97	0.944	0.953	0.952

表 2　某种绿豆在相同条件下的发芽实验结果表

每批粒数 n	2	5	10	50	100	500	1 000	1 500	2 000	3 000
发芽的粒数 m	2	4	9	44	92	463	928	1 396	1 866	2 794
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	1	0.8	0.9	0.88	0.92	0.926	0.928	0.931	0.933	0.931

从表 1 可以看到，当抽查的足球数很多时，抽到优等品的频率 $\frac{m}{n}$ 接近于某一个常数，并在它附近摆动．

从表 2 可以看到，当实验用的绿豆的粒数很多时，绿豆发芽的频率 $\frac{m}{n}$ 接近于某一个常数，并在它附近摆动 .

一般地，在一定条件下大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 会稳定地在某一个常数附近摆动，这个常数就是事件 A 发生的概率 $\mathrm{P}(A)$.

事实上,这类随机事件发生的概率的值是客观存在的，但我们无法确定它们的精确值，因而在实际工作中，人们常把试验次数很大时事件发生的频率作为概率的近似值 .

练一练

某个地区从某年起几十年内的新生婴儿数及其中的男婴数如下表所示：

时间范围	10 年内	20 年内	30 年内	40 年内	50 年内
新生婴儿数	55 440	96 070	135 200	171 900	211 030
男婴数	28 830	49 700	69 940	88 920	109 160
男婴出生频率					

(1) 计算并填写表中的男婴出生频率；

(2) 画出男婴出生频率的折线统计图；

(3) 这一地区男婴出生的概率估计值是多少？

习题 13.2

1. 某射手在同一条件下进行射击，结果如下表所示：

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心频数 m	8	19	33	44	91	179	454	905
击中靶心频率 $\frac{m}{n}$								

(1) 计算并填写表中击中靶心的频率；

(2) 这个射手射击 1 次，击中靶心的概率估计值是多少？

2. 某种油菜籽在相同条件下的发芽试验结果如表：

每批粒数 n	100	300	400	600	1 000	2 020	3 000
发芽的粒数 m	96	283	344	552	948	1 912	2 848
发芽的频率 $\frac{m}{n}$							

(1) 计算并填写表中发芽的频率；

(2) 画出发芽频率的折线统计图；

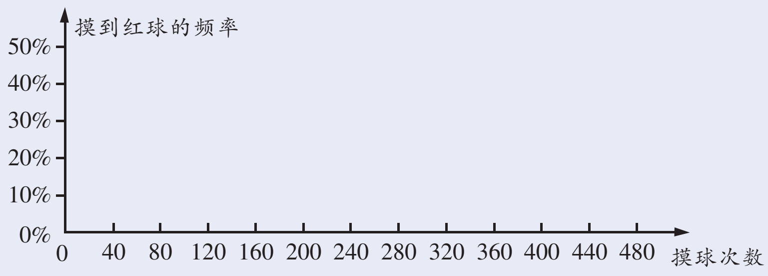
(3) 这种油菜籽发芽的概率估计值是多少？

3. 不透明的袋子中装有 3 个白球和 1 个红球，每个球除颜色外都相同．从袋子中任意摸出 1 个球，记录摸到的球的颜色后放回袋中，做若干次这样的摸球试验．

(1) 将试验数据填入下表；

摸球次数	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480
摸到红球的频数												
摸到红球的频率												

(2) 完成下面的折线统计图；



(3) 摸到红球的概率估计值是多少？

阅读

概率小史

概率主要研究不确定现象，是随保险业的发展而产生的，但引起数学家思考概率问题的却是一个赌博的输赢问题．

传说，17 世纪中叶，法国贵族公子梅雷参加赌博，和赌友各押赌注 32 枚金币．双方约定：抛掷一枚硬币，正面朝上，梅雷得 1 分，反面朝上，赌

友得 1 分，先积满 10 分者赢全部赌注．赌博进行了一段时间，梅雷已得 8 分，赌友得 7 分．这时候梅雷接到通知，要他马上陪国王接见外宾，赌局只好中断．这就碰到一个问题：应该怎样分配这 64 枚金币才算公平合理？梅雷为这个问题苦恼多时，最后他不得不向法国数学家帕斯卡请教，请求帮助作出公正的裁判，这就是历史上著名的“分赌注”问题．

人们为了解决这类问题，于是对不确定现象进行了大量的研究，从而产生了概率论这门学科．人们在各行各业以及日常生活中经常会遇到“某事件发生的可能性大小”的问题，因此，概率论问世后，不断发展并得到了广泛的应用．

数学活动

掷图钉

在硬地上掷一枚图钉，通常会出现两种情况：

(A) 钉尖着地

(B) 钉尖不着地

(1) 在掷图钉前，猜一猜：任意掷一枚图钉，是钉尖着地的可能性大，还是钉尖不着地的可能性大？钉尖着地和钉尖不着地的概率各是多少？

(2) 掷图钉 50 次，把试验结果填入下表：

掷图钉的次数	钉尖着地的次数	钉尖不着地的次数
50		

(3) 根据试验结果，估计钉尖着地和钉尖不着地的概率；

(4) 汇总全班同学的试验结果，估算钉尖着地和钉尖不着地的概率．

你的猜想与试验结果吻合吗？

小结与思考

1. 必然事件和不可能事件都是确定事件．举例说明什么是不可能事件，什么是必然事件．

2. 在日常生活中，有很多事情我们事先无法肯定它会不会发生，这样的事件称为随机事件．随机事件发生的可能性有大有小．

3. 举例说明生活中一些随机事件，这些事件发生的可能性哪个较大？哪个较小？

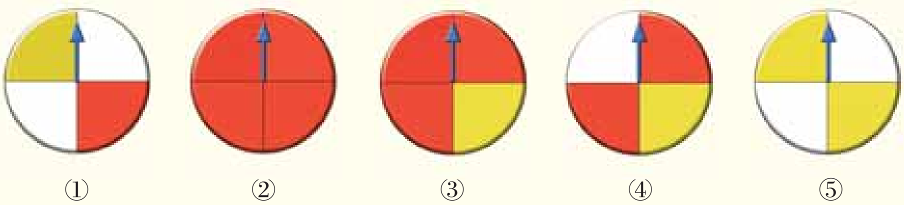
4. 在充分多次试验中，一个随机事件的频率会在一个常数附近摆动，通常试验次数越多，摆动幅度越小，这个性质称为频率的稳定性．

5. 通过试验，用频率估计概率的大小时，必须要求试验是在相同条件下进行，且试验次数足够的多．

复习题

复习巩固

1. 下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件？并说明理由．
   (1) 如果 a、b 都是有理数，那么 $a+b=b+a$；
   (2) 从分别标有 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 的 10 张小标签中任取 1 张，得到 8 号签；
   (3) 没有水分，种子发芽；
   (4) 某人射击 1 次，中靶．
2. 在一个不透明的袋子中装有 1 个白球、2 个黄球和 3 个红球，每个球除颜色外完全相同，将球摇匀，从中任取 1 球．
   (1) 恰好取出白球；(2) 恰好取出黄球；(3) 恰好取出红球．
   根据你的判断，将这些事件按发生的可能性从小到大的顺序排列．
3. 转动如图所示的一些可以自由转动的转盘，当转盘停止时，猜想指针落在红色区域内的可能性大小，并将转盘的序号按可能性从小到大的顺序排列．



（第 3 题）

4. 甲、乙、丙三个事件发生的概率分别为：50%，10%，90%，它们各与下面的哪句话相配．
   (A) 发生的可能性很大，但不一定发生；
   (B) 发生的可能性很小；
   (C) 发生与不发生的可能性一样．

5. 某批乒乓球的质量检验结果如下表所示：

抽取球数 n	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
优等品数 m	48	95	188	471	949	1 418	1 893
优等品频率 $\frac{m}{n}$							

(1) 计算并填写表中的优等品频率；

(2) 画出优等品频率的折线统计图；

(3) 该批乒乓球优等品的概率估计值是多少？

灵活运用

6. 如果某地明天降雨概率为 20%，后天降雨概率为 80%，当地居民哪一天出门时更有可能需带雨具？

7. 设计 1 个骰子，使得掷出 1 点的可能性比掷出 6 点的可能性大．设计 1 个转盘，使得转动后指针落在红色区域的可能性与落在白色区域的可能性一样大．

8. 生活中，为了强调某件事情一定会发生，有人会说“这件事百分之二百会发生”．这句话正确吗？

探索研究

9. 在一个不透明的袋子中装有 1 个白球、2 个黄球和 3 个红球，每个球除颜色外完全相同，将球摇匀，从中任取 1 球．

(1) 能够事先确定取出的球是哪种颜色吗？

(2) 你认为取出哪种颜色的球的概率最大？

(3) 怎样改变各颜色球的数目使取出每一种颜色的球的概率相等？

10. 与你的同伴合作，做抛掷 2 枚硬币的试验．

(1) 同时抛掷 2 枚硬币，记录试验结果并填表；

抛掷次数 n	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400
出现 2 个正面的频数 m										
出现 2 个正面的频率 $\frac{m}{n}$										

(2) 画出出现 2 个正面的频率的折线统计图；

(3) 出现 2 个正面的概率估计值是多少？

课题学习

丢弃了多少塑料袋

在我们丢弃的垃圾中，有些是难以分解的，例如，有的塑料袋即使经过几十年也不会被分解成无害物质，因此大量的塑料袋垃圾会造成环境污染．

做一做

1. 设计一个调查表，记录自己家庭 1 周内丢弃的塑料袋数量．

2. 统计全班同学的家庭 1 周内丢弃的塑料袋数量，并根据收集的数据制作统计图．

想一想

全班同学的家庭 1 年内丢弃的塑料袋数量有多少？全校同学的家庭 1 年内丢弃的塑料袋数量有多少？

议一议

1. 如果将全班同学的家庭在 1 周内丢弃的塑料袋全部铺开，大约占多大面积？1 年呢？可以铺满学校吗？

2. 如果将全校同学的家庭在 1 年内丢弃的塑料袋全部铺开，大约占多大面积？想像一下，这些塑料袋可以铺多大地方？

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>利用平移设计图案</td><td>活动时间</td><td>一课时</td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">自我评价</td><td colspan="3">你是否乐意参加这样的数学活动？（非常乐意　乐意　无所谓　不乐意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你有没有从同学的意见中得到启发？（得到　没有得到）</td></tr>
<tr><td colspan="3">对同学的意见你提出过质疑吗？提出了什么不同意见？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你是否愿意向同学展示自己的作品？（非常愿意　愿意　无所谓　不愿意）</td></tr>
<tr><td>小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>生活中的“较大数”与“较小数”</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td>活动形式（个人或小组）、成员</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="9">自我评价</td><td colspan="3">你通过什么方式收集数据的？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你是如何描述数据的？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你在活动中遇到了什么困难？如何解决的？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你是否愿意向大家展示自己的成果？（非常愿意　愿意　无所谓　不愿意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你参加本次活动最大的感受与收获是什么？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你有没有从同伴的意见中得到启发？（得到　没有得到）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你乐意参加这样的数学活动吗？（很乐意　乐意　无所谓　不乐意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你对自己在这次活动中的表现满意吗？（很满意　满意　不太满意　不满意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">如果你对课本设计的这个“数学活动”有什么改进的建议，请写下来让老师和编者知道，使我们的数学活力更加完善、更加精彩！</td></tr>
<tr><td>小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>拼图·公式</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">活动形式(个人或小组)、成员</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="8">自我评价</td><td colspan="3">你探索得到了什么结论?</td></tr>
<tr><td colspan="3">你是怎样探索得到结论的?</td></tr>
<tr><td colspan="3">在参与数学活动过程中，遇到了什么困难?如何解决的?</td></tr>
<tr><td colspan="3">你与同伴交流时是否敢于发表自己的意见?发表了哪些意见? (敢于发表　发表过　没有发表)</td></tr>
<tr><td colspan="3">你有没有从同伴的意见中得到启发? (得到　没有得到)</td></tr>
<tr><td colspan="3">你是否愿意向大家展示自己的成果? (非常愿意　愿意　无所谓　不愿意)</td></tr>
<tr><td colspan="3">如果你在这次活动中有“创造”，请写下来让大家分享!</td></tr>
<tr><td colspan="3">如果你对课本设计的这个“数学活动”有什么改进的建议，请写下来让老师和编者知道，使我们的数学活动更加完善、更加精彩!</td></tr>
<tr><td>小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>算 年 龄</td><td>活动时间</td><td>一课时</td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="6">自我评价</td><td colspan="3">你编了什么问题?列出了怎样的方程?</td></tr>
<tr><td colspan="3">你在编题中遇到了什么困难?</td></tr>
<tr><td colspan="3">你参加本次活动最大的感受和收获是什么?</td></tr>
<tr><td colspan="3">你对自己在这次活动中的表现满意吗? (很满意　满意　不太满意　不满意)</td></tr>
<tr><td colspan="3">你有没有从同学的意见中得到启发?</td></tr>
<tr><td colspan="3">对课本设计的这个“数学活动”，你有什么改进的建议?</td></tr>
<tr><td>小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>设计象形图</td><td>活动时间</td><td>一课时</td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="7">自我评价</td><td colspan="3">你为自己的作品命名了吗？它的意义是什么？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你为自己的作品涂色了吗？为什么要涂这些颜色？</td></tr>
<tr><td colspan="3">在自己设计图案的过程中有什么困难？怎样解决的？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你对自己的作品满意吗？ （满意　较满意　不太满意　不满意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你在小组中展示作品时，愿意听取别人的意见吗？ （非常愿意　愿意　无所谓　不愿意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你乐意参加这样的数学活动吗？ （很乐意　乐意　无所谓　不乐意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">对课本设计的这个“数学活动”，你有什么改进的建议？</td></tr>
<tr><td>小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

<table>
<tr><td>活动名称</td><td>心率的调查</td><td>活动时间</td><td></td></tr>
<tr><td>参加者</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="8">自我评价</td><td colspan="3">调查的对象、数量、范围是什么？</td></tr>
<tr><td colspan="3">在参与数学活动过程中，遇到了什么困难？如何解决的？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你对调查的结果能做出解释吗？有什么感受和想法？</td></tr>
<tr><td colspan="3">对别人的意见你提出过质疑吗？提出了什么不同意见？ （提出过　没有提出过）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你有没有从同学的意见中得到启发？</td></tr>
<tr><td colspan="3">你乐意参加这样的数学活动吗？你对自己在这次活动中的表现满意吗？
（很满意　满意　不太满意　不满意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">你是否愿意向大家展示自己的成果？ （非常愿意　愿意　无所谓　不愿意）</td></tr>
<tr><td colspan="3">对课本设计的这个“数学活动”，你有什么改进的建议？</td></tr>
<tr><td>小组评价</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>老师评语</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

数学活动评价表

活动名称	掷　图　钉	活动时间	
参加者			
自我评价	你是否乐意参加这样的数学活动？（非常乐意　乐意　无所谓　不乐意）		
	活动过程中，运用了什么知识和思想方法？		
	你能运用这种实验的方法解决其他类似问题吗？有没有尝试过？		
	你对实验的结果能做出解释吗？有什么感受和想法？		
	在与同学合作交流中，是否互相尊重？（互相尊重　互相不尊重　不知道）		
	这种活动有价值吗？谈谈自己的体会和感受．		
同学或小组评价			
老师评语			